TEORIA MĂSURII

Liviu C. Florescu *

* Universitatea "Al.I.Cuza",
Facultatea de Matematică,
Bd. Carol I, 11,
R–700506 Iaşi, ROMANIA,
e–mail: lflo@uaic.ro

În mod intenţionat această pagină este lăsată albă !

Cuprins

Introducere

Până spre sfârşitul secolului XIX analiza matematică se limita la studiul funcţiilor continue şi se baza pe integrala Riemann. Inspirându-se din lucrările lui E. Borel şi C. Jordan, H. Lebesgue a construit în 1901 o teorie a măsurii pe care a folosit-o ulterior, în cadrul tezei sale de doctorat susţinută în 1902, la definirea unei integrale mult mai generale decât integrala Riemann, integrală care îi poartă numele.

Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită iar $\delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ este o divizare a intervalului $[0,1]$, atunci se introduc sumele Darboux superioare şi inferioare prin relaţiile:

$$S(f,\delta) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \right] \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

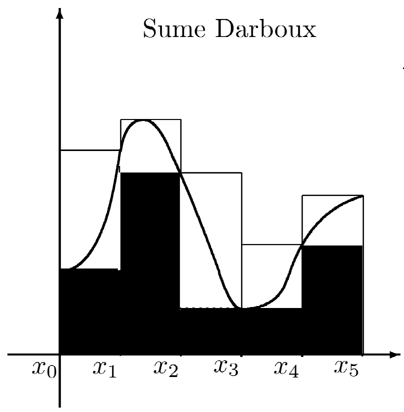
$$s(f,\delta) = \sum_{k=1}^{n} \left[\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \right] \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

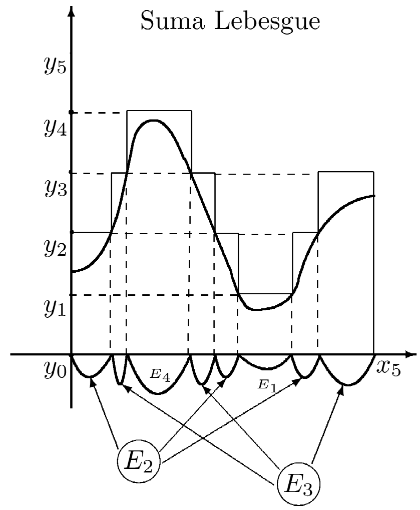
Funcţia f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ dacă distanţa dintre cele două sume poate fi făcută oricât de mică pentru divizări suficient de fine.

Lebesgue a avut ideea de a inversa lucrurile: fie $\Delta = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ o divizare a mulţimii valorilor funcţiei f şi fie suma

$$\sigma(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \lambda(\underbrace{\{x \in [0,1] : y_{k-1} \le f(x) \le y_k\}}_{E_k})$$

unde $\lambda(E_k)$ este "măsura" mulţimii E_k; funcţia f va fi "integrabilă" dacă sumele σ au limită când divizările Δ sunt suficient de fine. În figura de mai jos am reprezentat separat, pentru o funcţie reprezentată prin graficul ei, sumele Darboux asociate divizării $\delta = \{x_0, \dots, x_5\}$ şi suma Lebesgue asociată divizării $\Delta = \{y_0, \dots, y_5\}$:





În figura din stânga, aria poligonului delimitat de linia continuă superioară, axa Ox şi dreptele $y = x_0$ şi $y = x_5$ reprezintă suma Darboux superioară în timp ce aria poligonului înnegrit este suma Darboux inferioară. Suma Lebesgue $\sigma(f, \Delta)$ este aria poligonului din figura dreaptă delimitat de linia continuă superioară, axa Ox şi dreptele $y = 0$ şi $y = x_5$.

Din cele spuse mai sus, construcţia lui Lebesgue este posibilă doar dacă dăm un sens "măsurii" mulţimilor E_k, $\lambda(E_k)$.

În primul capitol al prezentului curs se extinde noţiunea de lungime a unui interval la o clasă cât mai amplă de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ (clasa mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue) aşa fel încât prelungirea să fie numărabil aditivă şi invariantă la translaţii. Vom defini în capitolul doi funcţiile măsurabile (funcţiile pentru care contraimaginea oricărui interval este o mulţime măsurabilă) şi dintre acestea vom identifica, în al treilea capitol, pe acelea care sunt integrabile în sens Lebesgue. Se vor studia proprietăţile clasei funcţiilor integrabile şi ale integralei. Spaţiile L^p, studiate în capitolul patru, vor furniza exemple remarcabile de spaţii Banach. Vom prezenta teoria seriilor Fourier în $L^2([-\pi, \pi])$. În capitolul cinci vom extinde măsura şi integrala în $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$. Măsurile reale şi teorema lui Radon-Nikodym de reprezentare a acestora vor face obiectul de studiu al ultimului capitol.

Capitolul 1

Măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$

Un interval de numere reale este o mulţime $J \subseteq \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in J$ şi pentru orice z cu $x < z < y$, rezultă că $z \in J$.

Fie J un interval şi fie $a = \inf J$ şi $b = \sup J$; atunci $(a, b) \subseteq J \subseteq [a, b]$, unde $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ şi $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Dacă $a = -\infty$ sau $b = +\infty$, atunci intervalul J este nemărginit; dacă $a, b \in \mathbb{R}$, J este unul dintre intervalele mărginite $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$.

Fie $\mathcal{J}$ familia tuturor intervalelor (mărginite sau nemărginite) din $\mathbb{R}$; pentru orice interval $J \in \mathcal{J}$ vom nota cu $|J|$ lungimea acestui interval ($|J| = +\infty$ dacă J este nemărginit). Vom conveni ca $\emptyset = (a, a) \in \mathcal{J}$ şi atunci $|\emptyset| = 0$.

Dacă $J \in \mathcal{J}$ şi $x \in \mathbb{R}$ atunci $x + J = \{x + y : y \in J\} \in \mathcal{J}$ şi $|x + J| = |J|$.

Întrebările la care dorim să răspundem în acest capitol sunt:

1). Există o funcţie de mulţime λ definită pe familia tuturor submulţimilor lui $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, care să verifice următoarele proprietăţi:

a). $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m,$
b). $\lambda(J) = |J|, \forall J \in \mathcal{J},$
c). $\lambda(x + A) = \lambda(A), \forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}?$

Precizăm de la început că o astfel de funcţie nu există. Atunci se impune o a doua întrebare:

2). Care este cea mai amplă clasă $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la care putem prelungi funcţia de lungime a intervalelor astfel încât prelungirea să verifice cele trei proprietăţi de mai sus pe $\mathcal{A}$?

1.1 Măsura mulţimilor deschise

Fie $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ familia tuturor intervalelor deschise (mărginite sau nemărginite) din $\mathbb{R}$.

1.1.1 Lemă. *Fie* $\{I_p : p \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$.

1). Dacă $I_0 \subseteq \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} I_p$, *atunci* $|I_0| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |I_p|$.

2). Dacă $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} I_p \subseteq I_0$ *şi* $I_p \cap I_q = \emptyset, \forall p \neq q$, *atunci* $\sum_{p=1}^{\infty} |I_p| \leq |I_0|$.

Demonstraţie. 1). Dacă unul dintre intervalele $I_p, p \geq 1$ este nemărginit atunci $|I_p| = +\infty$ şi astfel inegalitatea este evident verificată.
Presupunem deci că, pentru orice $p \geq 1, I_p = (a_p, b_p)$ este interval mărginit.

a). Dacă primul interval $I_0 = (a, b)$ este mărginit, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0, [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty}(a_p, b_p)$ şi deci există $p_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$(*) \qquad [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{k=1}^{p_0}(a_k, b_k).$$

(Dacă nu, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ există $x_p \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \setminus \bigcup_{k=1}^{p}(a_k, b_k)$. Şirul $(x_p)_p$ fiind mărginit admite un subşir $(x_{k_p})_p$ convergent la un $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Fie atunci $p_1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x \in I_{p_1}$; deoarece I_{p_1} este vecinătate a lui x, există $p_2 \in \mathbb{N}^*, p_2 > p_1$ a.î. $x_{k_p} \in I_{p_1}$, oricare ar fi $p \geq p_2$. Deoarece $p_1 < p_2 \leq k_{p_2}$, aceasta contrazice însă $x_{k_{p_2}} \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \setminus \bigcup_{k=1}^{k_{p_2}}(a_k, b_k)$.)

Relaţia $(*)$ ne permite să reordonăm familia finită de intervale $\{(a_k, b_k) : k = 1, \cdots p_0\}$ a.î. $a_1 < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b_{p_0}$. Atunci $b - a - 2\varepsilon < b_{p_0} - a_1 \leq \sum_{k=1}^{p_0} |I_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$. Deoarece ε este arbitrar pozitiv,

$$b - a = |I_0| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |I_p|.$$

b). Dacă $I_0 = (a, +\infty)$ atunci, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, (a, n) \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p$. Folosind punctul precedent, $n - a \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ de unde $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = +\infty = |I_0|$.

La fel se face raţionamentul şi în celelalte cazuri posibile pentru I_0.

2). Dacă I_0 este nemărginit, atunci $|I_0| = +\infty \geq \sum_{p=1}^{\infty} |I_p|$.

Să presupunem acum că $I_0 = (a, b)$ este mărginit; atunci toate intervalele $I_p = (a_p, b_p), p \in \mathbb{N}^*$, vor fi mărginite.

Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{p=1}^{n} I_p \subseteq I_0$. Deoarece $I_1, \dots, I_n$ sunt disjuncte două câte două, putem să le reordonăm aşa fel încât

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n \le b.$$

Atunci $|I_0| = b - a \ge (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) = \sum_{p=1}^{n} |I_p|$. Deoarece n este arbitrar în $\mathbb{N}^*$, trecem la limită în relaţia de mai sus pentru $n \to +\infty$ şi obţinem inegalitatea dorită. ■

1.1.2 Definiţie. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ este **deschisă** dacă $A = \emptyset$ sau dacă, pentru orice $x \in A$, există un interval deschis $I \in \mathcal{I}$ aşa fel încât $x \in I \subseteq A$. Vom nota cu τ_u familia mulţimilor deschise pe $\mathbb{R}$. Această familie este o topologie pe $\mathbb{R}$, adică satisface următoarelor proprietăţi:

(T_1) $D \cap G \in \tau_u, \forall D, G \in \tau_u$;

(T_2) $\cup_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma \in \tau_u, \forall \{D_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau_u$;

(T_3) $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau_u$.

Vom spune că τ_u este **topologia uzuală** pe $\mathbb{R}$.

Observăm că intervalele deschise sunt mulţimi deschise şi deci, conform cu (T_2), reuniunile numărabile (chiar şi cele nenumărabile) de intervale deschise sunt mulţimi deschise. Putem arăta mai mult că orice mulţime deschisă este reuninune numărabilă de intervale deschise.

1.1.3 Teoremă (teorema de structură a mulţimilor deschise).

Oricare ar fi $D \in \tau_u$ există o familie numărabilă de intervale deschise $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$, disjuncte două câte două, aşa fel încât $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Această reprezentare a lui D este unică, până la ordinea intervalelor din familie.

Demonstraţie. Fie $D \in \tau_u$; dacă $D = \emptyset$ atunci ea se exprimă ca o reuniune numărabilă de intervale deschise vide de tipul (a, a).

Presupunem că D este nevidă; $\forall x \in D$ există $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \in (a_0, b_0) \subseteq D$. Fie atunci

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \exists b \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } x \in (a, b) \subseteq D\},$$

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } x \in (a, b) \subseteq D\}.$$

Observăm că $a_0 \in A_x$ şi $b_0 \in B_x$ deci $A_x \neq \emptyset \neq B_x$. Definim acum $a_x = \inf A_x \in [-\infty, +\infty), b_x = \sup B_x \in (-\infty, +\infty]$ şi $I_x = (a_x, b_x)$. Să

arătăm că $x \in I_x \subseteq D$; într-adevăr, $a_x \leq a_0 < x < b_0 \leq b_x$ şi deci $x \in I_x$. $\forall\ y \in I_x, a_x < y < b_x$ şi deci $\exists\ a \in A_x$, $\exists\ b \in B_x$ astfel încât $a_x \leq a < y < b \leq b_x$. Ţinînd cont de definiţiile mulţimilor A_x şi B_x, $\exists\ a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \in (a, b_1) \subseteq D$ şi $x \in (a_1, b) \subseteq D$. Dar (a, b_1) şi (a_1, b) sunt intervale nedisjuncte şi atunci $(a, b_1) \cup (a_1, b) = (a_2, b_2)$ unde $a_2 = \min\{a, a_1\}, b_2 = \max\{b, b_1\}$. Evident că $(a_2, b_2) \subseteq D$ şi că $a_2 \leq a < y < b \leq b_2$ de unde $y \in D$. Rezultă că $I_x \subseteq D$. Din cele arătate rezultă că I_x este cel mai mare interval deschis care conţine punctul x şi este inclus în D. Acest caracter maximal al lui I_x ne permite să arătăm că $\forall\ x, y \in D, I_x = I_y$, sau $I_x \cap I_y = \emptyset$. Într-adevăr, să presupunem că $I_x \cap I_y \neq \emptyset$; atunci $I = I_x \cup I_y$ este un interval şi $x \in I \subseteq$ $\subseteq D, y \in I \subseteq D$. Utilizînd maximalitatea intervalelor I_x şi I_y obţinem $I \subseteq I_x$ şi $I \subseteq I_y$ ceea ce ne conduce la $I_y \subseteq I_x$ şi respectiv la $I_x \subseteq I_y$, deci la $I_x = I_y$. Familia acestor intervale maximale $\mathcal{I}_D = \{I_x : x \in D\}$ este numărabilă. Într-adevăr, $\forall\ x \in D$, să fixăm un număr raţional $q_x \in I_x$ şi să definim aplicaţia $\varphi : \mathcal{I}_D \to \mathbb{Q}$, prin $\varphi(I_x) = q_x$. Observăm că dacă $I_x = I_y$, atunci I_x apare o singură dată ca element în familia $\mathcal{I}$ şi alegem acelaşi punct raţional q_x în $I_x = I_y$; deci φ este bine construită. Acum, pentru $I_x \neq I_y$ ştim că $I_x \cap I_y = \emptyset$ şi deci $q_x \neq q_y$, de unde $\varphi(I_x) \neq \varphi(I_y)$. Deci φ este injectivă şi deci $\mathcal{I}_D$ este numărabilă. Putem atunci să numerotăm $\mathcal{I}_D = \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, unde $I_n \cap I_m = \emptyset, \forall n \neq m$. Rezultă acum că $D = \cup_{x \in D} I_x = \cup\{I : I \in \mathcal{I}_D\} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$, deci D se exprimă ca o reuniune numărabilă de intervale deschise şi disjuncte. Dacă presupunem că $\mathcal{I}' = \{I'_n : n \in \mathbb{N}\}$ este o altă familie numărabilă de intervale deschise şi disjuncte astfel încât $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} I'_n$, atunci $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in I'_n$ avem $x \in I'_n \subseteq D$ şi deci $I'_n \subseteq I_x$, din caracterul maximal al intervalului I_x. Dar $I_x \in \mathcal{I}_D$ şi deci $\exists\ m_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $I'_n \subseteq I_{m_n}$. Fie $I'_n = (a'_n, b'_n)$; dacă am presupune că $I'_n \neq I_{m_n}$, atunci ar rezulta că $a'_n \in I_{m_n} \subseteq D$ sau $b'_n \in I_{m_n} \subseteq D$. Rezultă că $\exists\ p \in \mathbb{N}, p \neq n$ astfel încât $a'_n \in I'_p$ sau $b'_n \in I'_p$, ceea ce este absurd, deoarece I'_p este un interval deschis disjunct de I'_n. Deci $I'_n = I_{m_n}$, de unde $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}_D$. Pe de altă parte, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in I_n \subseteq D$, $\exists\ I'_{m_n} \in \mathcal{I}'$ astfel încât $x \in I'_{m_n} \subseteq D$; rezultă de asemenea că $I'_{m_n} \subseteq I_n$ şi cu un raţionament asemănător celui de mai sus, rezultă că $I_n = I'_{m_n} \in \mathcal{I}'$.

Deci $\mathcal{I}_D = \mathcal{I}'$ ceea ce asigură unicitatea descompunerii lui D. ■

1.1.4 Definiţie. Vom spune că $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ din teorema de mai sus este **reprezentarea** mulţimii D sau că $I_n, n \in \mathbb{N}$, sunt intervalele de reprezentare ale lui D.

Definim o funcţie de mulţime $\lambda : \tau_u \to \bar{\mathbb{R}}_+$ prin $\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$, unde $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ este reprezentarea mulţimii deschise D.

Datorită unicităţii acestei reprezentări, definiţia de mai sus este consistentă (schimbarea ordinii termenilor unei serii cu termeni pozitivi nu afectează natura şi nici suma seriei).

Pentru orice deschis $D \in \tau_u, \lambda(D)$ se va numi **măsura** mulţimii D.

În teorema următoare prezentăm câteva dintre proprietăţile importante ale măsurii mulţimilor deschise.

1.1.5 Teoremă. *Măsura mulţimilor deschise are următoarele proprietăţi:*

1). $\lambda(I) = |I|, \forall I \in \mathcal{I}$,

2). $\lambda(\emptyset) = 0, \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$,

3). $\forall x \in \mathbb{R}, \forall D \in \tau_u, x + D \in \tau_u$ *şi* $\lambda(x + D) = \lambda(D)$,

4). $\lambda(D) \leq \lambda(G), \forall D, G \in \tau_u,$ *cu* $D \subseteq G$,

5). $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n), \forall (D_n) \subseteq \tau_u, D_n \cap D_m = \emptyset, \forall n \neq m$,

6). $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n), \forall (D_n) \subseteq \tau_u$.

Demonstraţie.

Proprietatea 1) şi astfel 2) sunt evidente.

Pentru a demonstra 3) este suficient să observăm că, dacă $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ este reprezentarea mulţimii D atunci $x + D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x + I_n) \in \tau_u$ ($x + I_n$ este interval deschis) şi aceasta este reprezentarea mulţimii $x + D$.

Deci $\lambda(x + D) = \sum_{n=1}^{\infty} |x + I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \lambda(D)$.

4). Fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq G = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$ reprezentările celor două mulţimi.

Oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$ notăm $N_m = \{n \in \mathbb{N}^* : I_n \subseteq J_m\} \subseteq \mathbb{N}^*$. Să observăm că unele dintre mulţimile N_m pot fi vide (s-ar putea ca J_m să nu conţină niciun interval I_n); fie $M = \{m \in \mathbb{N}^* : N_m \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{N}^*$.

Atunci $\{N_m : m \in M\}$ formează o partiţie pentru $\mathbb{N}^*$, adică:

1). $N^* = \bigcup\limits_{m \in M} N_m$ şi

2). $N_m \cap N_p = \emptyset$, oricare ar fi $m, p \in M, m \neq p$.

Într-adevăr, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*, I_n \subseteq D \subseteq G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} J_m$ şi atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ aşa fel încât $I_n \cap J_m \neq \emptyset$; fie $x \in I_n \cap J_m$. Deoarece intervalul J_m este maximal cu proprietatea de a conţine x, rezultă că $I_n \subseteq J_m$ şi deci $n \in N_m$ şi $m \in M$.

Dacă am presupune că există $n \in N_m \cap N_p$, atunci $I_n \subseteq J_m$ şi $I_n \subseteq J_p$ ceea ce contrazice faptul că J_m şi J_p sunt disjuncte pentru $m \neq p$.

Să observăm acum că, deoarece intervalele I_n sunt disjuncte două câte două şi, oricare ar fi $m \in M$, $\bigcup\limits_{n \in N_m} I_n \subseteq J_m$, din punctul 2) al lemei 1.1.1 rezultă că $\sum\limits_{n \in N_m} |I_n| \leq |J_m|, \forall m \in M$. Atunci

$$\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{m \in M} \sum_{n \in N_m} |I_n| \leq \sum_{m \in M} |J_m| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}^*} |J_m| = \lambda(G).$$

5). Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ fie $D_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n$ reprezentarea lui D_n; atunci $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n$ este reprezentarea lui D şi deci

$$\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n).$$

6). Fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \tau_u$ şi fie $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p$ reprezentarea lui D iar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $D_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n$ reprezentarea lui D_n.

Rezultă că, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$,

$$I_p = I_p \cap D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_p \cap D_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_p \cap I_k^n),$$

unde $I_p \cap I_k^n \in \mathcal{I}, \forall p, k, n \in \mathbb{N}$.

Din punctul 1) al lemei 1.1.1, $|I_p| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_p \cap I_k^n|$ şi deci

$$\lambda(D) = \sum_{p=1}^{\infty} |I_p| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_p \cap I_k^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |I_p \cap I_k^n| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(D \cap I_k^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n).$$

În relaţiile de mai sus am ţinut cont că, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}$, $D \cap I_k^n = \bigcup_{p=1}^{\infty} (I_p \cap I_k^n)$ este reprezentarea mulţimii deschise $D \cap I_k^n$. ■

1.1.6 Definiţie. Proprietatea 3) din teorema precedentă se numeşte proprietatea de **invarianţă la translaţii** a măsurii λ. Proprietatea 4) este proprietatea de **monotonie** a măsurii. Proprietatea 5) se numeşte proprietatea de **aditivitate numărabilă** iar 6) proprietatea de **subaditivitate numărabilă** a măsurii λ.

Un rezultat ca cel din teorema de structură a mulţimilor deschise (teorema 1.1.3) nu funcţionează în spaţii $\mathbb{R}^n, n \geq 2$; de exemplu în $\mathbb{R}^2$ nu putem reprezenta orice mulţime deschisă ca o reuniune numărabilă şi disjunctă de intervale bidimensionale (dreptunghiuri) deschise. Totuşi va funcţiona un rezultat de reprezentare a deschişilor ca reuniune de dreptunghiuri închise fără puncte interioare comune.

Un rezultat asemănător avem şi în cazul lui $\mathbb{R}$.

1.1.7 Definiţie. Un interval $J \in \mathcal{J}$ se va numi interval **închis** dacă:

a). J este mărginit şi atunci este de forma $J = [a, b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ sau

b). J este nemărginit şi atunci este de forma $(-\infty, b]$ sau $[a, +\infty)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

1.1.8 Teoremă. *Orice mulţime deschisă nevidă $D \in \tau_u$ se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au în comun cel mult câte un punct.*

Dacă $D = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$, unde $(J_n)_n$ este o familie de intervale închise cu câte cel mult un punct comun, atunci $\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$.

Demonstraţie. Fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, unde $I_n = (a_n, b_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$, sunt intervale deschise (mărginite sau nu) şi disjuncte.

Pentru a obţine reprezentarea dorită pentru D este suficient să reprezentăm fiecare interval deschis (a, b) ca reuniune numărabilă de intervale închise fără puncte interioare comune.

Fie $a_p \downarrow a$ şi $b_p \uparrow b$ a.î. $a < a_p < b_q < b, \forall p, q \in \mathbb{N}$. Atunci

$$(a, b) = \bigcup_{p=0}^{\infty} [a_{p+1}, a_p] \cup [a_0, b_0] \cup \bigcup_{p=0}^{\infty} [b_p, b_{p+1}].$$

Fie acum $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ o reprezentare a lui D ca reuniune de intervale închise care au în comun cel mult câte un punct.

a). Să presupunem că toate intervalele J_n sunt mărginite. Atunci, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = [a_n, b_n]$, cu $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ există intervalele deschise I_n, K_n a.î. $I_n \subseteq J_n \subseteq K_n$ şi

$$|J_n| \leq |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}, |K_n| \leq |J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Putem alege $I_n = \left(a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ şi $K_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$.

Fie $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ şi $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$; atunci $I \subseteq D \subseteq K$ şi, deoarece intervalele I_n sunt disjuncte două câte două,

$$\lambda(D) \geq \lambda(I) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \varepsilon. \tag{1}$$

Pe de altă parte, folosind monotonia şi numărabila subaditivitate a măsurii λ, obţinem

$$\lambda(D) \leq \lambda(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |K_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| + \varepsilon. \tag{2}$$

ε fiind arbitrar pozitiv, din (1) şi (2) rezultă că $\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$.

b). Să presupunem acum că unul dintre intervalele J_n este nemărginit; de exemplu $J_{n_0} = [a_{n_0}, +\infty)$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, fie $I_{n_0} = (a_{n_0} + \varepsilon, +\infty) \subseteq J_{n_0} \subseteq D$; atunci $+\infty = |I_{n_0}| = \lambda(D)$. Deci $\lambda(D) = +\infty = |J_{n_0}| = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$. ∎

1.1.9 Observaţie. Remarcăm că o mulţime deschisă D se poate scrie în mai multe moduri ca reuniune numărabilă de intervale închise fără puncte interioare comune; pentru fiecare astfel de scriere suma lungimilor intervalelor este aceeaşi - măsura mulţimii D.

1.2 Măsura exterioară Lebesgue

1.2.1 Definiţie. Aplicaţia $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ definită prin

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(D) : D \in \tau_u, A \subseteq D\}, \forall A \subseteq \mathbb{R},$$

se numeşte **măsura exterioară** Lebesgue.

Din definiţie se observă imediat că

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}, \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

1.2.2 Observaţie. Remarcăm imediat că, pentru orice mulţime deschisă D, $\lambda^*(D) = \lambda(D)$. Într-adevăr, din definiţia măsurii exterioare, $\lambda^*(D) \leq \lambda(D)$ căci mulţimea D însăşi intră printre deschişii care conţin D. Pe de altă parte, oricare ar fi alt deschis G a.î. $D \subseteq G$, $\lambda(D) \leq \lambda(G)$ (vezi proprietatea 4) din teorema 1.1.5) şi deci $\lambda(D) \leq \lambda^*(D)$.

Măsura exterioară are următoarele proprietăţi:

1.2.3 Teoremă.

1). $\lambda^*(\emptyset) = 0$,
2). $A \subseteq B \Longrightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$,
3). $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n), \forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. 1). Datorită observaţiei precedente, $\lambda^*(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$, deoarece $\emptyset \in \tau_u$ şi $\lambda(\emptyset) = 0$.

2). Deoarece $A \subseteq B$, $\{\lambda(D) : D \in \tau_u, B \subseteq D\} \subseteq \{\lambda(G) : G \in \tau_u, A \subseteq D\}$, de unde, trecând la margine inferioară, $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

3). Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\lambda^*(A_n) = +\infty$ atunci inegalitatea este evident verificată.

Presupunem acum că $\lambda^*(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, există $D_n \in \tau_u$ a.î. $A_n \subseteq D_n$ şi $\lambda(D_n) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \tau_u$ şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq D$; rezultă că $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \lambda(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon$. Deoarece ε este arbitrar pozitiv obţinem numărabila subaditivitate a lui λ^*. ■

1.2.4 Observaţii.

(i) Proprietatea 2) pune în evidenţă monotonia lui λ^* iar 3) spune că λ^* este numărabil subaditivă.

(ii) $\lambda^*(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, \{x\} \subseteq (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ de unde $\lambda^*(\{x\}) \leq \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\lambda^*(\{x\}) = 0$.

(iii) $\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B), \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Fie $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, aşa fel încât $A_1 = A, A_2 = B$ şi, pentru orice $n \geq 3, A_n = \emptyset$; atunci din proprietăţile 1) şi 3) ale teoremei precedente,

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Această proprietate se numeşte finită subaditivitate; ea se poate extinde prin inducţie completă la orice număr finit de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$.

(iv) Pentru orice interval $J \in \mathcal{J}$, $\lambda^*(J) = |J|$. Dacă J este interval deschis, atunci proprietatea rezultă din observaţia 1.2.2. Dacă J nu este deschis, atunci diferă de un interval deschis prin cel mult două puncte. Proprietatea rezultă atunci din (ii).

Măsura exterioară are o proprietate asemănătoare celei din teorema 1.1.8.

1.2.5 Propoziţie. *Dacă* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$*, unde, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*,* J_n *sunt intervale închise care au în comun cel mult un punct, atunci*

$$\lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|.$$

Demonstraţie. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ aşa fel încât intervalul J_{n_0} este nemărginit, atunci $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(J_{n_0}) = |J_{n_0}| = +\infty$ şi deci egalitatea are loc.

Putem deci presupune că $|J_n| < +\infty$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există un interval deschis $I_n \subseteq J_n$ aşa fel încât $|J_n| < |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$; fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \tau_u$. Atunci $D \subseteq A$ şi, cum intervalele I_n sunt disjuncte două câte două, $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(D) = \lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \varepsilon$, de unde $\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$. Subaditivitatea numărabilă a lui λ^* ne asigură inegalitatea inversă. ■

Următoarea teoremă arată că măsura exterioară este invariantă la translaţii.

1.2.6 Teoremă. $\lambda^*(x + A) = \lambda^*(A), \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Oricare ar fi $D \in \tau_u$ cu $A \subseteq D$, $x + A \subseteq x + D$; din proprietatea 3) a teoremei 1.1.5, $\lambda^*(x + A) \leq \lambda(D)$ şi astfel $\lambda^*(x + A) \leq \lambda^*(A)$. Deoarece această ultimă inegalitate are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) = \lambda^*(-x + (x + A)) \leq \lambda^*(x + A)$. ■

Din cele de mai sus λ^* verifică proprietăţile b) şi c) prezentate în introducerea acestui capitol; ea este o prelungire numărabil subaditivă şi invariantă la translaţii a funcţiei de lungime a intervalelor. Aşa cum rezultă din exemplul următor, λ^* nu este numărabil aditivă (nu verifică proprietatea a)).

1.2.7 Exemplu (exemplul lui Vitali).

Fie $A = [0, 1]$; definim relaţia ϱ pe A prin $x\varrho y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Putem constata cu uşurinţă că aceasta este o relaţie de echivalenţă pe A (este reflexivă, simetrică şi tranzitivă). Reamintim că $\forall x \in A$, clasa de echivalenţă de reprezentant x, $[x] = \{y \in A : x\varrho y\} = \{y \in A : y - x \in \mathbb{Q}\} = \{y \in A : y \in x + \mathbb{Q}\} = A \cap (x + \mathbb{Q})$. Rezultă de aici că $[x]$ este o mulţime numărabilă, $\forall x \in A$. Ştim că două clase de echivalenţă distincte sunt disjuncte şi că reuniunea acestor clase este A. Deoarece fiecare clasă de echivalenţă este nevidă, axioma alegerii ne asigură că există o mulţime A_1 care conţine câte un singur element din fiecare clasă de echivalenţă. Deci $\forall x \in A, \exists x_1 \in A$ astfel încât $A_1 \cap [x] = \{x_1\}$. Fiecare clasă de echivalenţă $[x]$ fiind infinită, rezultă că $[x] \setminus A_1 = [x] \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$; aplicăm din nou axioma alegerii pentru familia de mulţimi nevide $\{[x] \setminus A_1 : x \in A\}$. Există deci o mulţime A_2 care conţine câte un singur element din mulţimile acestei familii. Deci $\forall x \in A, \exists x_2 \in A$ astfel încât $A_2 \cap ([x] \setminus A_1) = \{x_2\}$, ş.a.m.d.

Inductiv, obţinem familia de mulţimi disjuncte două câte două $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ astfel încât $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n$ conţine câte cel mult un singur element din fiecare clasă $[x]$. Folosind observaţia 1.2.4 (iv) şi proprietatea

3) din teorema 1.2.3,

$$1 = \lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n),$$

de unde rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\lambda^*(A_{n_0}) > 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $B_p = \frac{1}{p} + A_{n_0} \subseteq [0,2]$; din teorema 1.2.6 ştim că $\lambda^*(B_p) = \lambda^*(A_{n_0}) > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p \subseteq [0,2]$,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p\right) \leq 2. \tag{1}$$

Pe de altă parte, putem demonstra că mulţimile $\{B_p : p \in \mathbb{N}^*\}$ sunt disjuncte două câte două. Intr-adevăr, dacă am presupune că există $p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q$ şi există $x \in B_p \cap B_q$, atunci $x - \frac{1}{p}, x - \frac{1}{q} \in A_{n_0}$. Dar $(x - \frac{1}{p})\varrho(x - \frac{1}{q})$ deci $x - \frac{1}{p}$ şi $x - \frac{1}{q}$ sunt două elemente diferite aparţinând aceleiaşi clase de echivalenţă. Aceasta reprezintă o contradicţie deoarece A_{n_0} conţine câte cel mult un element din fiecare clasă de echivalenţă.

Dacă am presupune că λ^* este numărabil aditivă, atunci, deoarece mulţimile $\{B_p : p \in \mathbb{N}^*\}$ sunt disjuncte două câte două rezultă că

$$\lambda^*\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^*(B_p) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^*(A_{n_0}) = +\infty. \tag{2}$$

(1) şi (2) sunt evident contradictorii; deci ipoteza că λ^* este numărabil aditivă este falsă.

Deci extensia realizată în definiţia 1.2.1 este prea amplă, λ^* neîndeplinind cerinţele precizate la începutul acestui capitol.

În propoziţia următoare dăm şi alte formule de calcul a măsurii exterioare a unei mulţimi.

1.2.8 Propoziţie. *Oricare ar fi mulţimea* $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &= \inf\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]\} \\ &= \inf\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie $\lambda_1^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]\}$; pentru orice acoperire a lui A cu un şir de intervale deschise (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$ şi deci că $\lambda_1^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ de unde $\lambda_1^*(A) \leq \lambda^*(A)$.

Dacă $\lambda_1^*(A) = +\infty$ atunci egalitatea este demonstrată.

Presupunem acum că $\lambda_1^*(A) < +\infty$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir de intervale semiînchise $((a_n, b_n])_{n\geq 1}$ a.î. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$ şi $\lambda_1^*(A) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$. Atunci $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n, b_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right)$ de unde
$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + \varepsilon < \lambda_1^*(A) + 2\cdot\varepsilon$. Deoarece ε este arbitrar obţinem inegalitatea inversă $\lambda^*(A) \leq \lambda_1^*(A)$.

A doua formulă se demonstrează asemănător. ∎

Deşi măsura exterioară nu este, în general, numărabil aditivă, pe anumite şiruri de mulţimi ea verifică proprietatea de numărabilă aditivitate.

Oricare ar fi două mulţimi nevide $B, C \subseteq \mathbb{R}$, notăm cu $d(B, C) =$ $= \inf\{|x - y| : x \in B, y \in C\}$. Numărul real pozitiv $d(B, C)$ se numeşte distanţa dintre mulţimile B şi C. Este evident că, dacă B şi C au un punct comun, atunci $d(B, C) = 0$. Reciproca afirmaţiei precedente nu este adevărată. Într-adevăr, dacă $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $C = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, atunci $B \cap C = \emptyset$ şi $d(B, C) = 0$. În general, se poate arăta că $d(B, C) = 0$ dacă şi numai dacă există două şiruri $(x_n)_n \subseteq B, (y_n)_n \subseteq C$ aşa fel încât $x_n - y_n \to 0$.

Dacă $B = \emptyset$ sau $C = \emptyset$, atunci convenim ca $d(B, C) = +\infty$.

1.2.9 Teoremă.

1). $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) + \lambda^*(C)$, oricare ar fi B, C, astfel încât $d(B, C) > 0$ şi $A = B \cup C$.

2). $\lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{p}\lambda^*(A_n)$, oricare ar fi $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $d(A_n, A_m) > 0, \forall n, m \in \{1, \cdots, p\}$ cu $n \neq m$ şi $A = \cup_{n=1}^{p}A_n$.

3). $\lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$, oricare ar fi $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $d(A_n, A_m) > 0, \forall n \neq m$ şi $A = \cup_{n=1}^{\infty}A_n$.

Demonstraţie. 1). Din proprietatea de finită subaditivitate a lui λ^* (vezi punctul (iii) al observaţiei 1.2.4), $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) + \lambda^*(C)$. Dacă am presupune că $\lambda^*(A) = +\infty$ atunci avem egalitatea cerută.

Să presupunem acum că $\lambda^*(A) < +\infty$; folosind prima formulă de calcul din propoziţia 1.2.8, $\forall\varepsilon > 0, \exists\{(a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ a.î. $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(a_n, b_n]$ şi $\lambda^*(A) + \varepsilon > \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n)$. Fără să restrângem generalitatea putem să presupunem că, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n < \delta = d(B, C)$ (în caz contrar se vor diviza intervalele $(a_n, b_n]$ într-un număr suficient de subintervale de aceeaşi natură a căror lungimi să verifice cerinţa de mai sus).

Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n]$ intersectează numai una dintre mulţimile B sau C. Fie

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n] \cap B \neq \emptyset\} \text{ şi}$$
$$N_2 = \{n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n] \cap C \neq \emptyset\}.$$

Observăm că $N_1 \cap N_2 = \emptyset$; într-adevăr, dacă am presupune, prin reducere la absurd că există $n \in N_1 \cap N_2$, atunci $(a_n, b_n] \cap B \neq \emptyset \neq (a_n, b_n] \cap C$. Deci ar exista $x \in B, y \in C$ astfel încât $a_n < x, y \leq b_n$; atunci $|x - y| < b_n - a_n < \delta = d(B, C)$, ceea ce contrazice definiţia distanţei de la B la C. Rezultă că ipoteza $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ este falsă.

Oricare ar fi $x \in B$, există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x \in (a_n, b_n]$ şi deci $n \in N_1$. Rezultă că $B \subseteq \bigcup_{n \in N_1} (a_n, b_n]$. Similar, $C \subseteq \bigcup_{n \in N_2} (a_n, b_n]$. Deci $\lambda^*(B) \leq \sum_{n \in N_1} (b_n - a_n)$ şi $\lambda^*(C) \leq \sum_{n \in N_2} (b_n - a_n)$ şi astfel

$$\lambda^*(B) + \lambda^*(C) \leq \sum_{n \in N_1} (b_n - a_n) + \sum_{n \in N_2} (b_n - a_n) = \sum_{n \in N_1 \cup N_2} (b_n - a_n) \leq$$
$$\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Deoarece ε este arbitrar, obţinem inegalitatea inversă şi deci egalitatea cerută.

2). Demonstraţia se face inductiv; pentru $p = 2$, am demonstrat-o la punctul precedent. Presupunem proprietatea verificată pentru $p-1$ mulţimi şi fie $\{A_1, \cdots, A_p\}$ o familie de p mulţimi pentru care distanţa dintre oricare două este strict pozitivă. Notăm cu $A = \bigcup_{n=1}^{p} A_n$ şi cu $B = \bigcup_{n=1}^{p-1} A_n$. Atunci

$$d(B, A_p) = \min\{d(A_n, A_p) : n = 1, \cdots, p - 1\} > 0.$$

Utilizând punctul 1) şi ipoteza inductivă, $\lambda^*(A) = \lambda^*(B \cup A_p) = \lambda^*(B) + \lambda^*(A_p) = \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^*(A_n) + \lambda^*(A_p) = \sum_{n=1}^{p} \lambda^*(A_n)$.

3). Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, $A \supseteq \bigcup_{n=1}^{p} A_n$ şi deci $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{p} A_n) = \sum_{n=1}^{p} \lambda^*(A_n)$. Deci $\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$. Aceasta împreună cu numărabila subaditivitate a lui λ^* conduce la egalitatea cerută. ■

Vom prezenta la finalul acestui paragraf o noţiune de mare importanţă în teoria măsurii şi integrării, aceea de mulţime neglijabilă.

1.2.10 Definiţie. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ este **neglijabilă în sens Lebesgue** sau de **măsură nulă** dacă $\lambda^*(A) = 0$.

Ţinând cont de definiţie, A este neglijabilă în sens Lebesgue dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un şir de intervale deschise $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ astfel încât $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

Să remarcăm că în cazul mulţimilor neglijabile în sens Jordan, acoperirea cu intervale deschise era finită; deci orice mulţime neglijabilă în sens Jordan este neglijabilă şi în sens Lebesgue.

Deoarece nu vom lucra cu mulţimi neglijabile în sens Jordan, în cele ce urmează vom utiliza termenul de mulţime **neglijabilă** pentru mulţimile neglijabile în sens Lebesgue.

1.2.11 Exemple.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \{x\}$ este neglijabilă (vezi punctul (ii) al observaţiei 1.2.4).

(ii) Orice mulţime numărabilă este neglijabilă.

Într-adevăr, fie $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime numărabilă; $\lambda^*(A) = \lambda^*(\cup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(\{a_n\}) = 0$ şi deci A este neglijabilă.

În particular, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt mulţimi neglijabile.

În exerciţiul 5 din 1.5 dăm un exemplu de mulţime neglijabilă nenumărabilă.

1.3 Mulţimi măsurabile Lebesgue

În această secţiune vom preciza care sunt submulţimile lui $\mathbb{R}$ cărora li se poate atribui o măsură şi de ce proprietăţi se bucură această măsură.

Am definit, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(D) : D \in \tau_u, A \subseteq D\}$.

Dacă presupunem că $\lambda^*(A) < +\infty$, atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists D \in \tau_u$ cu $A \subseteq D$ astfel încât $\lambda(D) < \lambda^*(A) + \varepsilon$ sau $\lambda(D) - \lambda^*(A) < \varepsilon$.

Pe de altă parte, $D = A \cup (D \setminus A)$, de unde $\lambda(D) = \lambda^*(D) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(D \setminus A)$ şi deci $\lambda(D) - \lambda^*(A) \leq \lambda^*(D \setminus A)$.

1.3.1 Definiţie. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ este **măsurabilă** (în sens Lebesgue) dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists D \in \tau_u$ astfel încât $A \subseteq D$ şi $\lambda^*(D \setminus A) < \varepsilon$.

Fie $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{L}$ clasa mulţimilor măsurabile Lebesgue pe $\mathbb{R}$ şi fie $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$; λ se va numi **măsura Lebesgue** pe $\mathbb{R}$.

Dacă $A \in \mathcal{L}$, vom nota cu $\mathcal{L}(A) = \{B \subseteq A : B \in \mathcal{L}\}$, familia submulţimilor măsurabile ale lui A.

1.3.2 Observaţie. $\tau_u \subseteq \mathcal{L}$; într-adevăr, dacă $G \in \tau_u, \forall \varepsilon > 0, \exists D = G \supseteq G$ astfel încât $\lambda^*(D \setminus G) = \lambda^*(\emptyset) = 0 < \varepsilon$.

Rezultă de aici că λ este prelungirea măsurii mulţimilor deschise şi astfel notaţia făcută nu conduce la confuzii.

1.3.3 Teoremă.

1). Orice mulţime neglijabilă este măsurabilă.

2). $\forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{L}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.

Demonstraţie. 1). Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime neglijabilă în sens Lebesgue ($\lambda^*(A) = 0$); pentru orice $\varepsilon > 0$, există $D \in \tau_u$ a.î. $A \subseteq D$ şi $\lambda(D) < \varepsilon$. Atunci $\lambda^*(D \setminus A) \leq \lambda^*(D) = \lambda(D) < \varepsilon$ şi deci $A \in \mathcal{L}$.

2). Fie $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, unde $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathcal{L}$; $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists D_n \in \tau_u$ a.î. $A_n \subseteq D_n$ şi $\lambda^*(D_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \tau_u$; atunci $A \subseteq D$ şi $D \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \setminus A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \setminus A_n)$, de unde $\lambda^*(D \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(D_n \setminus A_n) \leq \varepsilon$. ■

1.3.4 Observaţii. (i) $\emptyset \in \mathcal{L}$.

(ii) Oricare ar fi $A \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A) = 0$ şi oricare ar fi $B \subseteq A$, rezultă că $\lambda^*(B) = 0$ şi deci $B \in \mathcal{L}$.

Vom spune că măsura λ este **completă**.

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{L}, A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \cup \cdots \in \mathcal{L}$.

(iv) Orice interval este mulţime măsurabilă. Într-adevăr, intervalele deschise sunt mulţimi deschise şi deci măsurabile iar celelalte intervale diferă de intervale deschise printr-o mulţime neglijabilă (prin cel mult două puncte).

Vom demonstra că, pe lângă mulţimile deschise, şi mulţimile închise sunt măsurabile Lebesgue.

Reamintim că o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ este închisă dacă complementara sa este deschisă ($\mathbb{R} \setminus A \in \tau_u$) sau, echivalent, dacă, oricare ar fi un şir $(x_n)_n \subseteq A$ cu $x_n \to x$ rezultă $x \in A$.

O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ este compactă dacă este mărginită şi închisă sau, echivalent, dacă orice şir de puncte din A admite un subşir convergent la un punct din A.

Întâi vom prezenta o lemă.

1.3.5 Lemă. *Fie F o mulţime închisă şi K o mulţime compactă aşa fel încât $F \cap K = \emptyset$; atunci $d(F, K) > 0$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $d(F, K) = \inf\{|x - y| : x \in F, y \in K\} = 0$; atunci există două şiruri, $(x_n)_n \subseteq F$ şi $(y_n)_n \subseteq K$, a.î. $x_n - y_n \to 0$. Cum mulţimea K este compactă, $(y_n)_n$ admite un subşir $(y_{k_n})_n$ convergent la un element $y \in K$. Rezultă că $x_{k_n} \to y$ şi, deoarece F este închisă, $y \in F$. De aici rezultă că $y \in F \cap K$ ceea ce contrazice ipoteza că F şi K sunt disjuncte. ■

1.3.6 Teoremă. *Orice mulţime închisă este măsurabilă Lebesgue.*

Demonstraţie. a). Să presupunem întâi că F este o mulţime închisă şi mărginită; deci F este compactă şi $\lambda^*(F) < +\infty$ (vezi 6) din 1.5).

Din definiţia măsurii exterioare, $\forall\varepsilon > 0, \exists D \in \tau_u$ a.î. $F \subseteq D$ şi $\lambda(D) < \lambda^*(F) + \varepsilon$. Atunci $D \setminus F \in \tau_u$ şi, din teorema 1.1.8, $D \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, unde $J_n, n \geq 1$, sunt intervale închise care au în comun câte cel mult un punct; în plus $\lambda(D \setminus F) = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$.

Oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*, \bigcup_{n=1}^{m} J_n = J$ este o submulţime închisă a lui $D \setminus F$ şi astfel $F \cap J = \emptyset$. Din lema precedentă, $d(F, J) > 0$ şi atunci teorema 1.2.9 ne asigură că $\lambda^*(F \cup J) = \lambda^*(F) + \lambda^*(J)$.

Rezultă că $\lambda(D) \geq \lambda^*(F \cup J) = \lambda^*(F) + \lambda^*(J)$. Două dintre intervalele închise $\{J_n : n = 1, \cdots, m\}$ au în comun un punct (caz în care reuniunea lor este tot un interval închis) sau sunt disjuncte (caz în care distanţa dintre ele este strict pozitivă); aplicând iarăşi teorema 1.2.9, $\lambda^*(J) = \sum_{n=1}^{m} |J_n|$.

Atunci $\sum_{n=1}^{m} |J_n| \leq \lambda(D) - \lambda^*(F) < \varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}^*$ şi deci $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \leq \varepsilon$. Rezultă că $\lambda(D \setminus F) \leq \varepsilon$ de unde $F \in \mathcal{L}$.

b). Fie acum F o mulţime închisă şi nemărginită; atunci $F = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F \cap [-n, n])$ este o reuniune numărabilă de mulţimi închise şi mărginite deci măsurabile; punctul 2) al teoremei 1.3.3 ne asigură că $F \in \mathcal{L}$. ∎

1.3.7 Teoremă. *Complementara oricărei mulţimi măsurabile Lebesgue este măsurabilă.*

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{L}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists D_n \in \tau_u$ a.î. $A \subseteq D_n$ şi $\lambda^*(D_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Rezultă că $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ de unde, trecând la complementară, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c \subseteq A^c$. Putem atunci scrie

$$A^c = B \cup (A^c \setminus B). \tag{$*$}$$

Mulţimile $D_n^c = \mathbb{R} \setminus D_n$ sunt închise, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, şi atunci, din teorema 1.3.6, $D_n^c \in \mathcal{L}$ deci $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c \in \mathcal{L}$ (vezi 2) din teorema 1.3.3).

Pe de altă parte $A^c \setminus B = A^c \cap B^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \setminus A$ şi deci $A^c \setminus B \subseteq D_n \setminus A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $\lambda^*(A^c \setminus B) < \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ de unde $\lambda^*(A^c \setminus B) = 0$. Deoarece mulţimea $A^c \setminus B$ este neglijabilă, ea este măsurabilă Lebesgue şi atunci, din relaţia $(*)$, A^c este reuniune de două mulţimi măsurabile deci este măsurabilă. ∎

1.3.8 Corolar.

1). $A \cap B \in \mathcal{L}$, pentru orice $A, B \in \mathcal{L}$.

2). $A \setminus B \in \mathcal{L}$, pentru orice $A, B \in \mathcal{L}$.

3). $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ pentru orice şir $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}$.

Demonstraţie. Demonstraţia este consecinţă imediată a teoremei precedente şi a următoarelor relaţii: 1). $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; 2) $A \setminus B = A \cap B^c$ şi 3). $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$. ∎

Corolarul următor dă o caracterizare a mulţimilor măsurabile cu mulţimi închise.

1.3.9 Corolar. *$A \in \mathcal{L}$ dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există F mulţime închisă, $F \subseteq A$, aşa fel încât $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Demonstraţie. $A \in \mathcal{L} \iff A^c \in \mathcal{L} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists D \in \tau_u$ aşa fel încât $A^c \subseteq D$ şi $\lambda^*(D \setminus A^c) < \varepsilon$. Ultima afirmaţie este echivalentă cu existenţa mulţimii închise $F = D^c \subseteq A$ aşa încât $\lambda^*(A \setminus F) = \lambda^*(A \cap F^c) = \lambda^*(A \cap D) = \lambda^*(D \setminus A^c) < \varepsilon$. ∎

1.3.10 Teoremă. *Funcţia de mulţime $\lambda : \mathcal{L} \to [0, +\infty]$, definită prin $\lambda(A) = \lambda^*(A)$, oricare ar fi $A \in \mathcal{L}$, este numărabil aditivă, adică*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n), \forall A_n)_n \subseteq \mathcal{L}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m.$$

Demonstraţie. Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}$ un şir de mulţimi disjuncte două câte două şi fie $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

a). Presupunem întâi că mulţimile A_n sunt mărginite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Conform corolarului precedent, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime închisă $F_n \subseteq A_n$ aşa încât $\lambda^*(A_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Atunci $\lambda^*(A_n) \leq \lambda^*(A_n \setminus F_n) + \lambda^*(F_n) < \lambda^*(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Pentru orice $n \neq m$, A_n este disjunct de A_m şi deci $F_n \cap F_m = \emptyset$; mulţimile F_n fiind mărginite şi închise (deci compacte) rezultă din lema 1.3.5 că $d(F_n, F_m) > 0$ şi atunci, din teorema 1.2.9, $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(F_n)$.
Rezultă că

$$\lambda^*(A) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(F_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) - \varepsilon$$

şi, deoarece ε este arbitrar pozitiv, $\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$. Deci $\lambda^*|_{\mathcal{L}}$ est numărabil supraaditivă. Deoarece proprietatea de numărabilă subaditivitate este întotdeauna verificată, rezultă că λ^* este numărabil aditivă pe $\mathcal{L}$.

b). Să presupunem acum că mulţimile A_n nu sunt toate mărginite. Oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, notăm cu $I_p = [-p, p]$; atunci $\bigcup_{p=0}^{\infty} I_p = \mathbb{R}$ şi $I_p \subseteq I_{p+1}$. Vom nota, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $J_{p+1} = I_{p+1} \setminus I_p, J_0 = \{0\}$; J_p sunt mulţimi măsurabile (reuniuni de două intervale) disjuncte două câte două; în plus

$\bigcup_{p=0}^{\infty} J_p = \mathbb{R}$. Oricare ar fi $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$ fie $A_n^p = A_n \cap J_p$; atunci $A = \bigcup_{n,p} A_n^p$ şi mulţimile A_n^p sunt disjuncte două câte două şi mărginite. Utilizând cazul a), obţinem:

$$\lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^*(A_n^p) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* \left(\bigcup_{p=0}^{\infty} A_n^p \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \qquad \blacksquare$$

Vom prezenta mai jos câteva consecinţe ale numărabilei aditivităţi a măsurii Lebesgue pe $\mathcal{L}$.

1.3.11 Teoremă. *Măsura $\lambda : \mathcal{L} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ are următoarele proprietăţi:*
1). $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \forall (A_k)_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{L}, A_k \cap A_l = \emptyset, \forall k \neq l.$
2). $\lambda(A) \leq \lambda(B), \forall A, B \in \mathcal{L}$ *cu* $A \subseteq B$.
3). $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A), \forall A, B \in \mathcal{L}, A \subseteq B, \lambda(A) < +\infty.$
4). $\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B), \forall A, B \in \mathcal{L}.$
5). $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{L}.$
6). $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \lambda(A_n), \forall (A_n) \in \mathcal{L}$ *cu* $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$
7). $\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \lambda(A_n), \forall (A_n) \in \mathcal{L}$ *cu* $A_{n+1} \subseteq A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *şi* $\lambda(A_1) < +\infty.$
8). $\lambda(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \lambda(A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{L}.$
9). $\limsup_n \lambda(A_n) \leq \lambda(\limsup_n A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{L}$ *cu* $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < +\infty.$

Demonstraţie. 1). $\lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$, unde, $\forall k > n, A_k = \emptyset$. Aplicând proprietatea de numărabilă aditivitate a măsurii obţinem: $\lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k)$ deoarece, $\forall k > n, \lambda(A_k) = 0$.

2). Proprietatea de monotonie este consecinţă a punctului 2) din teorema 1.2.3 şi a faptului că $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$.

3). Proprietatea rezultă din faptul că $\lambda(B) < +\infty$ şi din $\lambda(A) = \lambda(B \cup (A \setminus B)) = \lambda(B) + \lambda(A \setminus B)$.

4). Dacă $\lambda(A \cap B) = +\infty$ relaţia este evident verificată. Presupunem deci că $\lambda(A \cap B) < +\infty$ şi aplicăm aditivitatea finită a măsurii λ în relaţia:

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)].$$

Ţinând cont de proprietatea 3), obţinem:

$$\lambda(A \cup B) = [\lambda(A) - \lambda(A \cap B)] + \lambda(A \cap B) + [\lambda(B) - \lambda(A \cap B)]$$

care ne conduce imediat la relaţia dorită.

5). Proprietatea rezultă din proprietatea 3) a teoremei 1.2.3.

6). Fie acum $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}$ un şir crescător de mulţimi şi fie $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\lambda(A_{n_0}) = +\infty$, atunci $\forall n \geq n_0, \lambda(A_n) = +\infty$ şi deci $\lambda(A) = +\infty = \lim_n \lambda(A_n)$.

Să presupunem acum că $\lambda(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$; atunci şirul disjunct asociat $(B_n)_n$ este dat de: $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \forall n \geq 2$. Utilizând proprietăţile şirului disjunct asociat obţinem:

$$\lambda(A) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda(B_k) =$$

$$= \lim_n [\lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + ... + \lambda(A_n \setminus A_{n-1})].$$

Toate mulţimile având măsură finită, putem aplica proprietatea 3): $\lambda(A) = \lim_n [\lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1) + ... + \lambda(A_n) - \lambda(A_{n-1})] = \lim_n \lambda(A_n)$.

7). Fie $(A_n) \subseteq \mathcal{L}$ un şir descrescător de mulţimi cu $\lambda(A_1) < +\infty$ şi fie $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$; atunci şirul $(B_n)_n$ definit prin $B_n = A_1 \setminus A_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este crescător ($B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$) şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$. Aplicând proprietatea 6) şirului $(B_n)_n$ obţinem $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \lambda(B_n)$. Deoarece $\lambda(A_1) < +\infty, \lambda(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi deci putem utiliza 3). Rezultă că $\lambda(A_1) - \lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n [\lambda(A_1) - \lambda(A_n)]$, de unde $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \lambda(A_n)$.

8). Fie şirul (B_n) definit prin $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \forall n \geq 1$. Se observă cu uşurinţă că $B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf_n A_n$. Rezultă din proprietatea 6) că $\lambda(\liminf_n A_n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \lambda(B_n)$. Dar, $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \subseteq A_n$, de unde $\lambda(B_n) \leq \lambda(A_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi deci, trecând la limită inferioară $\lim_n \lambda(B_n) = \liminf_n \lambda(B_n) \leq \liminf_n \lambda(A_n)$, ceea ce antrenează inegalitatea anunţată (aici $\liminf_n \lambda(A_n) = \sup_n \inf_{k \geq n} \lambda(A_k) \in \overline{\mathbb{R}}_+$).

9). Fie (A_n) un şir cu proprietăţile cerute în enunţ şi fie $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Definim şirul (B_n) prin $B_n = A \setminus A_n$. Atunci $\liminf_n B_n = A \setminus \limsup_n A_n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k = A \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ şi deci din 8) rezultă că $\lambda(\liminf_n B_n) \leq \liminf_n \lambda(B_n)$, sau $\lambda(A \setminus \limsup_n A_n) \leq \liminf_n \lambda(A \setminus A_n)$. Deoarece $\lambda(A) < +\infty$, se poate utiliza aici 3) şi deci

$$\lambda(A) - \lambda(\limsup_n A_n) \leq \liminf_n [\lambda(A) - \lambda(A_n)] = \lambda(A) - \limsup_n \lambda(A_n)$$

(reamintim că $\limsup_n \lambda(A_n) = \inf_n \sup_{k \geq n} \lambda(A_k)$). ∎

Următoarea teoremă pune în evidenţă câteva proprietăţi ale măsurii Lebesgue în legătură cu structura algebrică a lui $\mathbb{R}$.

1.3.12 Teoremă.

1). $\forall A \in \mathcal{L}, \forall x \in \mathbb{R}, x + A \in \mathcal{L}$ *şi* $\lambda(x + A) = \lambda(A)$.
2). $\forall A \in \mathcal{L}, -A \in \mathcal{L}$ *şi* $\lambda(-A) = \lambda(A)$.
3). $\forall A \in \mathcal{L}, \forall x \in \mathbb{R}, x \cdot A \in \mathcal{L}$ *şi* $\lambda(x \cdot A) = |x| \cdot \lambda(A)$.

Demonstraţie. 1). A fiind măsurabilă, $\forall \varepsilon > 0, \exists D \in \tau_u$ a.î. $A \subseteq D$ şi $\lambda^*(D \setminus A) < \varepsilon$. Atunci $x + D \in \tau_u$, $\lambda(x + D) = \lambda(D)$ (punctul 3) al teoremei 1.1.5), $x+A \subseteq x+D$ iar $\lambda^*((x+D)\setminus(x+A)) = \lambda^*(x+(D\setminus A)) = \lambda^*(D \setminus A) < \varepsilon$. Rezultă că $x + A \in \mathcal{L}$; egalitatea este consecinţă a teoremei 1.2.6.

2). Pentru orice $D \in \tau_u$ fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ reprezentarea lui D ca reuniune numărabilă de intervale deschise disjuncte două câte două (teorema 1.1.3); atunci $-D = \{-x : x \in D\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-b_n, -a_n) \in \tau_u$ şi $\lambda(-D) = \lambda(D)$. Proprietatea este atunci consecinţă imediată a definiţiei şi a exerciţiului 1) din 1.5.

3). Presupunem că $x > 0$; se observă că $\forall D \in \tau_u, x \cdot D \in \tau_u$ şi $\lambda(x \cdot D) = x \cdot \lambda(D)$. Proprietatea rezultă din definiţia măsurabiliăţii lui A şi din exerciţiul 1) din 1.5.

Dacă $x = 0$ atunci $x \cdot A = \{0\} \in \mathcal{L}$ şi $\lambda(x \cdot A) = 0 = x \cdot \lambda(A)$.

Dacă $x < 0$ atunci $x \cdot A = (-x) \cdot (-A)$ şi se aplică cazul pozitiv şi punctul 2) de mai sus. ■

Am menţionat (vezi exemplul (ii) din 1.2.11) că orice mulţime numărabilă este neglijabilă. Există însă şi exemple de mulţimi nenumărabile care sunt neglijabile. Un astfel de exemplu este mulţimea ternară a lui Cantor C (vezi [3], 3.5.8). C este o submulţime închisă de măsură nulă a lui $[0, 1]$ care are cardinalul $|C| = c = |\mathbb{R}|$. Cum măsura Lebesgue este completă, familia submulţimilor lui C, $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de unde $|\mathcal{P}(C)| = 2^c \leq |\mathcal{L}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^c$. Deci $|\mathcal{L}| = 2^c$.

Acelaşi raţionament poate fi făcut dacă în locul mulţimii lui Cantor considerăm mulţimea din exerciţiul 5 de la 1.5.

$\mathcal{L}$ este submulţime strictă a lui $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ deoarece λ^* nu este numărabil aditivă pe $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ - vezi exemplul lui Vitali 1.2.7. Printre mulţimile B_p construite în acest exemplu există mulţimi nemăsurabile Lebesgue.

Deoarece $\tau_u \subseteq \mathcal{L}$ rezultă că $\mathcal{L}$ conţine σ-algebra părţilor boreliene ale lui $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\mathcal{B}_u$. Se poate arăta că $|\mathcal{B}_u| = c < 2^c = |\mathcal{L}|$. Deşi $\mathcal{L}$ conţine mult mai multe elemente decât $\mathcal{B}_u$, ca măsură, mulţimile din $\mathcal{L}$ nu diferă de cele din $\mathcal{B}_u$. Restricţia măsurii Lebesgue pe $\mathcal{B}_u$ nu este completă (o submulţime a unei mulţimi boreliene de măsură nulă nu este, în mod obligatoriu, boreliană). Rezultatul următor arată că $\mathcal{L}$ este cea mai mică σ-algebră completă care conţine $\mathcal{B}_u$.

1.3.13 Teoremă. $A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow A = B \cup N$, *unde* $B \in \mathcal{B}_u$ *şi* $\lambda(N) = 0$.

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{L}$; atunci $A^c \in \mathcal{L}$ şi deci $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists D_n \in \tau_u$ a.î. $A^c \subseteq D_n$ şi $\lambda(D_n \setminus A^c) = \lambda(D_n \cap A) < \frac{1}{n}$. Fie mulţimea închisă $F_n = D_n^c \subseteq A$; atunci $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{B}_u$ şi $\lambda(A \setminus B) = \lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n)) < \frac{1}{n}$. Rezultă că mulţimea $N = A \setminus B$ este neglijabilă şi $A = B \cup N$.

Reciproc, dacă $A = B \cup N$ cu $B \in \mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{L}$ şi N neglijabilă, rezultă că $N \in \mathcal{L}$ şi deci că $A \in \mathcal{L}$. ∎

1.4 Cadru abstract

În cele prezentate până acum, am construit o măsura (măsura Lebesgue) pe $\mathbb{R}$. Vom aborda în acest paragraf un punct de vedere mai abstract anume vom considera o măsură generală definită pe o clasă de submulţimi ale unui spaţiu oarecare, convenabil structurată. Deoarece construcţia pe care o prezentăm generalizează măsura Lebesgue, toate proprietăţile unei măsuri generale vor fi şi proprietăţi ale măsurii Lebesgue.

1.4.1 Definiţie. Fie X o mulţime abstractă şi fie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$; $\mathcal{A}$ se numeşte σ-algebră pe X dacă:

1). $\forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;
2). $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$;
3). $X \in \mathcal{A}$.

1.4.2 Observaţii. (i) Fie $\mathcal{A}$ o σ-algebră pe X.
(a) $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$.
(b) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
(c) $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \cup \cdots \in \mathcal{A}$.
(d) $\forall A, B \in \mathcal{A}\ A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.
(e) $\forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathcal{A}$.
(f) $\forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}, \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ şi $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

(ii) Rezultă din teoremele 1.3.3, 1.3.6 şi corolarul 1.3.8 că familia mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue pe $\mathbb{R}$ este o σ-algebră.

1.4.3 Propoziţie. *Fie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$; atunci există o cea mai mică σ-algebră pe X, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, care conţine clasa $\mathcal{U}$.*

Demonstraţie. Se poate demonstra uşor că orice intersecţie (finită sau infinită) de σ-algebre este o σ-algebră. Atunci $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ este intersecţia tuturor σ-algebrelor ce conţin clasa $\mathcal{U}$ (măcar $\mathcal{P}(X)$ este o astfel de σ-algebră); ea este cea mai mică σ-algebră ce conţine $\mathcal{U}$. ∎

1.4.4 Definiţie.

σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ se numeşte **σ-algebra generată** de clasa $\mathcal{U}$.

Dacă τ este o topologie pe X atunci $\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{B}$ se numeşte clasa părţilor **boreliene** ale lui (X, τ) şi orice $B \in \mathcal{B}$ se numeşte mulţime **boreliană**.

1.4.5 Definiţie. Fie $\mathcal{A}$ o σ-algebră pe X şi fie $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ o funcţie de mulţime; μ se numeşte **măsură** pe X dacă:

1). $\mu(\emptyset) = 0$.

2). $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$.

Dacă $\mu(X) < +\infty$ atunci μ este măsură **finită** pe X; dacă $\mu(X) = 1$, μ se numeşte **probabilitate** pe X.

Dacă $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ şi, $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < +\infty$, atunci μ se numeşte **σ-finită**.

Măsura μ se numeşte **completă** dacă, $\forall A \in \mathcal{A}$ cu $\mu(A) = 0$ şi $\forall B \subseteq A$, rezultă $B \in \mathcal{A}$ (şi evident $\mu(B) = 0$).

1.4.6 Exemple.

(i) Fie $x \in X$ şi $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+$, $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$ δ_x este o probabilitate completă pe X numită măsura Dirac (masa unitate plasată în punctul x).

(ii) Fie $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & , A = \text{ finită}, \\ +\infty & , A = \text{ infinită}. \end{cases}$ μ este o măsură σ-finită şi completă pe $\mathbb{N}$ numită măsura de numărare.

Următoarea teoremă admite o demonstraţie similară celei date pentru teorema 1.3.11.

1.4.7 Teoremă. Fie $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ o măsură pe X; atunci:

1). $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \forall (A_k)_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{A}, A_k \cap A_l = \emptyset, \forall k \neq l$.

2). $\mu(A) \leq \mu(B), \forall A, B \in \mathcal{A}$ cu $A \subseteq B$.

3). $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A), \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B, \mu(A) < +\infty$.

4). $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B), \forall A, B \in \mathcal{A}$.

5). $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{A}$.

6). $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n), \forall (A_n) \in \mathcal{A}$ cu $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

7). $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n), \forall (A_n) \in \mathcal{A}$ cu $A_{n+1} \subseteq A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\mu(A_1) < +\infty$.

8). $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{A}$.

9). $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n), \forall (A_n) \subseteq \mathcal{A}$ cu $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < +\infty$.

1.4.8 Definiţie. Proprietatea 1) se numeşte proprietatea de **finită aditivitate** a măsurii μ; proprietatea 2) este proprietatea de **monotonie**, 3) este proprietatea de **substractivitate**, 5) este **numărabila subaditivitate** iar 6) şi 7) sunt proprietăţile de **continuitate** a măsurii μ **pe şiruri crescătoare**, respectiv **pe şiruri descrescătoare** de mulţimi.

Corolarul următor pune în evidenţă proprietăţile pe care le are măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$.

1.4.9 Corolar. *Clasa părţilor măsurabile Lebesgue, $\mathcal{L}$, este o σ-algebră pe $\mathbb{R}$ iar măsura Lebesgue, λ, este o măsură σ-finită şi completă pe $\mathbb{R}$.*

Dacă $A \in \mathcal{L}$ atunci $\mathcal{L}(A)$ este o σ-algebră pe A iar restricţia lui λ la $\mathcal{L}(A)$ este o măsură pe A.

1.5 Exerciţii

1). Fie $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ o mulţime numărabilă şi B o mulţime infinită.

a). Arătaţi că există $C = \{c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots\} \subseteq B$ astfel încât $B \setminus C$ este infinită; deduceţi de aici că $\aleph_0 \overset{\text{definiţie}}{=\!=\!=} \text{card}A \leq \text{card}B$ ($\aleph_0$ este cel mai mic cardinal transfinit).

b). Presupunem că $A \cap B = \emptyset$; arătaţi că funcţia $f : A \cup B \to B$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & x \in B \setminus C, \\ c_{2k-1}, & x = c_k \in C, \\ c_{2k}, & x = a_k \in A, \end{cases}$ este bijecţie.

Deduceţi de aici că $\text{card}B = \text{card}(A \cup B) \overset{\text{definiţie}}{=\!=\!=} \text{card}A + \text{card}B$.

2). Arătaţi că următoarele funcţii sunt bijecţii:

a). $f : (a, b) \to (c, d), f(x) = \dfrac{c-d}{a-b} \cdot x + \dfrac{ad-bc}{a-b}$.

b). $g : (a, b) \to (0, +\infty), g(x) = \dfrac{x-a}{b-x}$.

c). $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \ln x$.

3). Să se arate că $\lambda^*(x \cdot A) = |x| \cdot \lambda^*(A), \forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ (am notat $x \cdot A = \{xa : a \in A\}$ şi folosim convenţia $0 \cdot (+\infty) = 0$).

4). Să se arate că:

a). $d(B, C) \leq d(A, C)$, oricare ar fi $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ cu $A \subseteq B$.

b). $d(A \cup B, C) = \min\{d(A, C), d(B, C)\}$, oricare ar fi $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$.

5). Fie $A \subseteq (0, 1)$ mulţimea numerelor care, în scrierea zecimală, folosesc numai cifrele 0 şi 1. Să se arate că $\text{card}A = c$ $(= \text{card}\mathbb{R})$ şi $\lambda^*(A) = 0$.

Indicaţie: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, unde A_n notează mulţimea numerelor din A la care, în scrierea ca fracţie zecimală, cifra 1 apare prima oară pe locul n. Se arată că $d(A_n, A_{n+p}) > \frac{8}{10^{n+p}} > 0$, $A_1 = \frac{1}{10} + (\cup_{n=2}^{\infty} A_n)$ şi $A_n = 10 \cdot A_{n+1}, \forall n \geq 1$.

6). Să se arate că, dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este o mulţime mărginită, $\lambda^*(A) < +\infty$. Este adevărată reciproca ?

7). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă a.î. $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ este o mulţime neglijabilă ($\lambda^*(A) = 0$). Arătaţi că $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

8). Fie $C \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime mărginită şi închisă (compactă). Arătaţi că $\lambda^*(C) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \{I_1, \cdots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}$ a.î. $C \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ şi $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \varepsilon$.

(O mulţime compactă este neglijabilă Lebesgue dacă şi numai dacă este neglijabilă Jordan.)

9). Să se arate că, $\forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*$, $\lambda^*(x \cdot A) = |x| \cdot \lambda^*(A)$.

10). Fie $\lambda_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ funcţia de mulţime definită prin $\lambda_*(A) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq A, F$ mulţime închisă$\}, \forall A \subseteq \mathbb{R}$; λ_* se numeşte măsura interioară Lebesgue pe $\mathbb{R}$.

Să se arate că, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$ şi că $\lambda_*(A) = \lambda^*(A) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{L}$.

11). Fie $A \subseteq \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, notăm $D_n = \{x \in \mathbb{R} : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$. Să se arate că $(D_n)_n \subseteq \tau_u$ şi că, dacă A este compactă, atunci $\lambda(A) = \lim_n \lambda(D_n)$.

Să se arate că nu se poate renunţa la ipoteza compacităţii.

12). $A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists F$ mulţime închisă şi $\exists D$ mulţime deschisă astfel încât $F \subseteq A \subseteq D$ şi $\lambda(D \setminus F) < \varepsilon$.

13). Să se arate că, dacă $A \subseteq B \subseteq C$, $A, C \in \mathcal{L}$ şi $\lambda(A) = \lambda(C) < +\infty$, atunci $B \in \mathcal{L}$.

14). Măsura Lebesgue are proprietatea lui Darboux:

a). Fie $A \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A) > 0$; oricare ar fi b a.î. $0 < b < \lambda(A)$ există o mulţime $B \in \mathcal{L}, B \subseteq A$ a.î. $\lambda(B) = b$.

b). Fie $A, B \in \mathcal{L}$ două mulţimi mărginite a.î. $A \subseteq B$; să se arate că, $\forall c \in (\lambda(A), \lambda(B)), \exists C \in \mathcal{L}$ a.î. $A \subseteq C \subseteq B$ şi $\lambda(C) = c$.

Indicaţie. a). Fie A mărginită inferior şi $t_0 = \inf A$; definim funcţia $f : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ prin $f(t) = \lambda(A \cap [t_0, t])$. Atunci f este lipschitziană $f(t_0) = 0$ şi $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lambda(A)$. Funcţia f are deci proprietatea lui Darboux şi cum $b \in f((t_0, +\infty))$ există t a.î. $f(t) = b$; se consideră $B = A \cap [t_0, t]$.

Dacă A nu este mărginită inferior raţionăm similar pentru mulţimile $A_n = A \cap [-n, n]$.

b). $\lambda(A) < c < \lambda(B) \Longrightarrow 0 < c - \lambda(A) < \lambda(B \setminus A)$ şi se reduce problema la cazul a).

15). Fie $A, B \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A) < +\infty$ şi $\lambda(B) < +\infty$; arătaţi că

$$|\lambda(A) - \lambda(B)| \leq \lambda(A \Delta B)$$

unde $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ este diferenţa simetrică a mulţimilor A şi B.

16). Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, A_2, \cdots, A_n \subseteq [0, 1]$ mulţimi măsurabile Lebesgue cu $\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) > n - 1$; arătaţi că $\lambda(\cap_{k=1}^{n} A_k) > 0$.

Indicaţie. Folosiţi faptul că $\lambda(\cap_{k=1}^n A_k) = 1 - \lambda(\cup_{k=1}^n A_k^c)$.

17). Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}$ a.î. $\lambda(A_n \cap A_m) = 0$, oricare ar fi $n \neq m$. Să se arate că

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Capitolul 2

Funcţii măsurabile

În acest capitol vom introduce şi studia o clasă amplă de funcţii - aceea a funcţiilor măsurabile. Printre funcţiile măsurabile vom identifica (în capitolul următor) pe acelea integrabile. Clasa funcţiilor măsurabile conţine majoritatea funcţiilor cunoscute (funcţiile continue, monotone, funcţiile integrabile Riemann); în plus această clasă se bucură de o serie de proprietăţi remarcabile legate de trecerea la limită.

2.1 Definiţii. Proprietăţi

Să reamintim că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe A dacă este continuă în orice punct al mulţimii A. O caracterizare simplă a continuităţii globale (pe care o vom demonstra mai jos) afirmă că o funcţie este continuă dacă şi numai dacă întoarce deschişi în deschişi. Să reamintim că dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ atunci deschişii pe A sunt de forma $A \cap G$, cu $G \in \tau_u$.

Propoziţie. O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe A dacă şi numai dacă, $\forall D \in \tau_u, \exists G \in \tau_u$ a.î. $f^{-1}(D) = A \cap G$.

Demonstraţie. Presupunem că f este continuă pe A şi fie $D \in \tau_u$; dacă $f^{-1}(D) = \emptyset$ atunci putem alege $G = \emptyset$ şi obţinem concluzia dorită. Să presupunem că $f^{-1}(D) \neq \emptyset$; $\forall x \in f^{-1}(D)$, $f(x) \in D$ şi deci D este vecinătate pentru $f(x)$; f fiind continuă în x, există un interval deschis $I_x \in \mathcal{I}$ a.î. $x \in I_x$ şi $f(I_x) \subseteq D$; mulţimea $G = \bigcup_{x \in f^{-1}(D)} I_x$ îndeplineşte condiţiile propoziţiei.

Reciproc, presupunem că f întoarce deschişii din $\mathbb{R}$ în deschişi din A şi fie un punct arbitrar $x \in A$ şi V o vecinătate oarecare a lui $f(x)$; atunci există un interval deschis $I \in \mathcal{I} \subseteq \tau_u$ a.î. $f(x) \in I \subseteq V$. Rezultă că $x \in f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(V)$ şi, deoarece $f^{-1}(I)$ este o mulţime deschisă în A,

rezultă că $f^{-1}(V)$ este vecinătate în A a lui x.

Să remarcăm că, în propoziţia precedentă, mulţimile deschise D pot fi înlocuite cu intervale deschise, deci funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe A dacă şi numai dacă, $\forall I \in \mathcal{I}, \exists G \in \tau_u$ a.î. $f^{-1}(I) = A \cap G$.

2.1.1 Definiţie. Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$; f este **măsurabilă** Lebesgue pe mulţimea A dacă, $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{L}$.

Vom nota cu $\mathcal{L}(A)$ clasa funcţiilor măsurabile Lebesgue pe mulţimea A. Să observăm că, dacă $B \in \mathcal{L}(A)$ (adică $B \in \mathcal{L}, B \subseteq A$) şi dacă $f \in \mathcal{L}(A)$ atunci restricţia lui f la mulţimea B, $f|_B \in \mathcal{L}(B)$; într-adevăr, $\forall a \in \mathbb{R}, (f|_B)^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}((-\infty, a)) \cap B \in \mathcal{L}$.

2.1.2 Exemplu. Pentru orice $A \subseteq \mathbb{R}$ vom nota cu χ_A funcţia definită pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$ prin $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$ (funcţia caracteristică a lui A).

$$\chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}.$$

Într-adevăr, dacă $\chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ atunci $A^c = \mathbb{R} \setminus A = \chi_A^{-1}(-\infty, \frac{1}{2}) \in \mathcal{L}$, de unde $A \in \mathcal{L}$.

Reciproc, dacă $A \in \mathcal{L}$ atunci $\chi_A^{-1}(-\infty, a) = \begin{cases} \emptyset & , a \leq 0 \\ A^c & , 0 < a \leq 1 \\ \mathbb{R} & , 1 < a \end{cases} \in \mathcal{L}, \forall a \in \mathbb{R}$ şi deci $\chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Următoarea teoremă prezintă mai multe enunţuri echivalente cu cel din definiţia funcţiilor măsurabile pe o mulţime.

2.1.3 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$; următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1). $f \in \mathcal{L}(A)$.
2). $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{L}, \forall a \in \mathbb{R}$.
3). $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{L}, \forall a \in \mathbb{R}$.
4). $f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{L}, \forall a \in \mathbb{R}$.
5). $f^{-1}(I) \in \mathcal{L}, \forall I \in \mathcal{I}$.
6). $f^{-1}(D) \in \mathcal{L}, \forall D \in \tau_u$.
7). $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}, \forall B \in \mathcal{B}_u$.

Demonstraţie.

1) $\Longrightarrow$ 2): $f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right)\right), \forall a \in \mathbb{R}$.

2) $\Longrightarrow$ 3): $f^{-1}((a,+\infty)) = A \setminus f^{-1}((-\infty,a]), \forall a \in \mathbb{R}$.

3) $\Longrightarrow$ 4): $f^{-1}([a,+\infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a-\frac{1}{n},+\infty\right)\right), \forall a \in \mathbb{R}$.

4) $\Longrightarrow$ 5): Orice interval deschis $I \in \mathcal{I}$ este de una din formele $I = (-\infty,b), I = (a,+\infty)$ sau $I = (a,b)$ cu $a < b$.

$f^{-1}((-\infty,b)) = A \setminus f^{-1}([b,+\infty)), \forall b \in \mathbb{R}$,

$f^{-1}((a,+\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[a+\frac{1}{n},+\infty\right)\right), \forall a \in \mathbb{R}$ şi

$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((-\infty,b)) \cap f^{-1}((a,+\infty)), \forall a,b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$.

5) $\Longrightarrow$ 6): Din teorema de structură a mulţimilor deschise (vezi teorema 1.1.3), oricare ar fi $D \in \tau_u, D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ unde $\{I_n : n \geq 1\} \subseteq \mathcal{I}$. Atunci $f^{-1}(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n)$.

6) $\Longrightarrow$ 7): Fie $\mathcal{C} = \{C \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(C) \in \mathcal{L}\}$; rezultă imediat că $\mathcal{C}$ este o σ-algebră pe $\mathbb{R}$ şi, din condiţia 6), $\tau_u \subseteq \mathcal{C}$. Cum $\mathcal{B}_u$ este cea mai mică σ-algebră care conţine τ_u, $\mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{C}$ (vezi propoziţia 1.4.3 şi definiţia 1.4.4).

7) $\Longrightarrow$ 1): Orice interval deschis de forma $(-\infty,a)$ este mulţime deschisă şi deci boreliană. $\blacksquare$

2.1.4 Corolar. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi fie $C(A)$ clasa funcţiilor reale continue pe A.*

1). $C(A) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

2). *Orice funcţie monotonă pe A este măsurabilă pe A.*

Demonstraţie. 1). Fie $f \in C(A)$; din propoziţia de caracterizare a continuităţii prezentată la începutul acestui paragraf, oricare ar fi $D \in \tau_u$ există $G \in \tau_u$ a.î. $f^{-1}(D) = A \cap G \in \mathcal{L}$; punctul 6) ale teoremei precedente ne spune că $f \in \mathcal{L}(A)$.

2). Să presupunem că $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare; oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, fie $x_0 = \sup f^{-1}((-\infty,a)) \in (-\infty,+\infty]$. Atunci

$$A \cap (-\infty,x_0) \subseteq f^{-1}((-\infty,a)) \subseteq A \cap (-\infty,x_0]).$$

Într-adevăr, oricare ar fi $x \in A \cap (-\infty,x_0)$, există $y \in f^{-1}((-\infty,a))$ a.î. $x < y$. Rezultă că $f(x) \leq f(y) < a$. Incluziunea a doua este evidentă. Din cele două incluziuni rezultă că $f^{-1}((-\infty,a))$ coincide cu mulţimea din stânga sau cu cea din dreapta (cele două mulţimi diferă doar printr-un punct); dar cele două mulţimi sunt amândouă măsurabile Lebesgue. $\blacksquare$

Deoarece există funcţii continue care nu sunt monotone precum şi funcţii monotone discontinue, rezultă că cele două clase, clasa funcţiilor continue şi cea a funcţiilor monotone, sunt strict incluse în clasa funcţiilor măsurabile.

Notaţii. Fie $f, g, f_n : A \to \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$; vom utiliza curent, pentru simplificarea scrierii, următorul tip de prescurtări:

$$\begin{aligned}
(f = g) &\equiv \{x \in A : f(x) = g(x)\} \\
(f \neq g) &\equiv \{x \in A : f(x) \neq g(x)\} \\
(f_n \to f) &\equiv \{x \in A : f_n(x) \to f(x)\} \\
(f_n \nrightarrow f) &\equiv \{x \in A : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}
\end{aligned}$$

În acelaşi mod, este clar ce semnificaţie acordăm unor notaţii de tipul $(f > 0), (f < g), (f \in B)$ etc.

2.1.5 Definiţie. O proprietate P are loc **aproape peste tot** pe mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ dacă mulţimea $\{x \in A : x$ nu îndeplineşte proprietatea $P\}$ este neglijabilă (are măsura exterioară Lebesgue zero); vom prescurta spunând că P are loc a.p.t. pe A.

Astfel, vom spune că $f = g$ a.p.t. pe A dacă $\lambda^*((f \neq g)) = 0$; vom mai nota aceasta cu $f \doteq g$.

f este continuă a.p.t. pe A dacă $\lambda^*(\{x \in A : f$ discontinuă în $x\}) = 0$.

Şirul (f_n) converge a.p.t. pe A la funcţia f dacă $\lambda^*((f_n \nrightarrow f)) = 0$; vom nota această situaţie cu $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$.

Dacă nu există pericol de confuzie în legătură cu mulţimea A pe care proprietatea are loc a.p.t., putem să o omitem.

2.1.6 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}, f, g : A \to \mathbb{R}$.*

1). *Dacă $f \in \mathcal{L}(A)$ şi $f = g$ a.p.t., atunci $g \in \mathcal{L}(A)$.*

2). *Dacă f este continuă a.p.t. pe A atunci $f \in \mathcal{L}(A)$.*

Demonstraţie. 1). Fie $N = (f \neq g)$; atunci $\lambda(N) = 0$. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, g^{-1}((-\infty, a)) = (g < a) = [(g < a) \cap N] \cup [(g < a) \cap (A \setminus N)]$. Deoarece $[(g < a) \cap N] \subseteq N$, ea este neglijabilă şi deci măsurabilă Lebesgue (vezi teorema 1.3.3) iar $[(g < a) \cap (A \setminus N)] = [(f < a) \cap (A \setminus N)] \in \mathcal{L}$; rezultă că $g^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{L}$ şi deci $g \in \mathcal{L}(A)$.

2). Fie $N = \{x \in A : f$ discontinuă în $x\}$; atunci $\lambda(N) = 0$. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, a)) = (f < a) = [(f < a) \cap N] \cup [(f < a) \cap (A \setminus N)]$. Deoarece $[(f < a) \cap N] \subseteq N$, ea este neglijabilă şi deci măsurabilă Lebesgue (vezi teorema 1.3.3). Cum f este continuă pe $A \setminus N$, $f|_{A \setminus N} \in \mathcal{L}(A \setminus N)$ (vezi corolarul 2.1.4) şi deci $[(f < a) \cap (A \setminus N)] = [(f < a) \cap (A \setminus N)] \in \mathcal{L}$. Rezultă că $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{L}$ şi deci $f \in \mathcal{L}(A)$. ■

Vom aminti acum teorema lui Lebesgue de caracterizare a integrabilităţii Riemann.

2.1.7 Teoremă. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită; atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă f este continuă a.p.t. pe $[a, b]$.*

Pentru demonstraţie se poate consulta [3], 3.6.20.

Pe baza acestei teoreme şi a punctului 2) din teorema precedentă putem conchide că:

2.1.8 Corolar. *Orice funcţie integrabilă Riemann pe un interval $[a, b]$ este măsurabilă Lebesgue pe acel interval ($\mathcal{R}_{[a,b]} \subseteq \mathcal{L}([a, b])$).*

Operaţii cu funcţii măsurabile

Ne vom ocupa de comportarea proprietăţii de măsurabilitate faţă de operaţiile de compunere şi de trecere la limită. Apoi vom prezenta rezultate de compatibilitate a măsurabilităţii faţă de operaţiile algebrice de adunare, înmulţire cu scalari şi înmulţire a funcţiilor.

2.1.9 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}(A)$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe B; dacă $f(A) \subseteq B$ atunci $g \circ f \in \mathcal{L}(A)$.*

Demonstraţie. Oricare ar fi $D \in \tau_u$ există $G \in \tau_u$ a.î. $g^{-1}(D) = B \cap G$; atunci, folosind iar punctul 6) al teoremei 2.1.3, $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D)) = f^{-1}(G) \in \mathcal{L}$.

În general, contra-imaginea unei mulţimi măsurabile printr-o funcţie măsurabilă nu este măsurabilă şi deci compunerea a două funcţii măsurabile nu este, în general, o funcţie măsurabilă !

2.1.10 Corolar. *Fie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci:*

1). $f^n \in \mathcal{L}(A), \forall n \in \mathbb{N}$;

2). $e^f \in \mathcal{L}(A)$;

3). dacă $f(A) \subseteq (0, +\infty)$ *atunci* $\ln f \in \mathcal{L}(A)$ *şi* $f^\alpha \in \mathcal{L}(A), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Nu avem decât să observăm că se compune f, în 1) cu funcţia continuă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^n$, în 2) cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^x$ iar în 3) cu $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \ln x$, sau $g(x) = x^\alpha$.

2.1.11 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $(f_n) \subseteq \mathcal{L}(A)$; atunci:*

1). $f = \sup_n f_n \in \mathcal{L}(A)$, *dacă* $\sup_n f_n(x) < +\infty, \forall x \in A$;

2). $f = \inf_n f_n \in \mathcal{L}(A)$, *dacă* $\inf_n f_n(x) > -\infty, \forall x \in A$;

3). $f = \limsup_n f_n \in \mathcal{L}(A)$, *dacă* $\limsup_n f_n(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in A$;

4). $f = \liminf_n f_n \in \mathcal{L}(A)$, *dacă* $\liminf_n f_n(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in A$;

5). $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in A \Longrightarrow f \in \mathcal{L}(A)$.

6). $f_n \underset{A}{\overset{\cdot}{\to}} f \Longrightarrow f \in \mathcal{L}(A)$.

Demonstraţie.
1). Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a,+\infty)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}((a,+\infty)) \in \mathcal{L}$.
2). Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty,a)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{L}$.
3). $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k \in \mathcal{L}(A)$ (vezi 1) şi 2) de mai sus).
4). $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k \in \mathcal{L}(A)$ (vezi 1) şi 2) de mai sus).
5). Dacă $f_n(x) \to f(x)$, oricare ar fi $x \in A$, atunci
$f = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n \in \mathcal{L}(A)$.
6). Fie $N = (f_n \nrightarrow f)$; atunci $\lambda(N) = 0$ şi $f_n(x) \to f(x), \forall x \in A \setminus N$. Punctul precedent ne asigură că $f|_{A\setminus N} \in \mathcal{L}(A \setminus N)$.

Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, (f < a) = [(f < a) \cap N] \cup [(f < a) \cap (A \setminus N)]$. Deoarece $[(f < a) \cap N] \subseteq N$, ea este neglijabilă şi deci măsurabilă Lebesgue (vezi teorema 1.3.3) iar $[(f < a) \cap (A \setminus N)] = (f|_{A\setminus N})^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{L}$. Rezultă că $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{L}$ şi deci $f \in \mathcal{L}(A)$. ∎

2.1.12 Teoremă. *Fie $f, g \in \mathcal{L}(A)$ şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$; atunci $f+g \in \mathcal{L}(A), \alpha\cdot f \in \mathcal{L}(A)$ şi $f \cdot g \in \mathcal{L}(A)$.*

Demonstraţie. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$,

$$(f + g < a) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} [(f < r) \cap (g < a - r)] \in \mathcal{L};$$

deci $f + g \in \mathcal{L}(A)$.

Dacă $\alpha > 0$ atunci, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, (\alpha \cdot f > a) = \left(f > \dfrac{a}{\alpha}\right) \in \mathcal{L}$ iar dacă $\alpha < 0$ atunci $(\alpha \cdot f > a) = \left(f < \dfrac{a}{\alpha}\right) \in \mathcal{L}$.

În sfârşit, dacă $f \in \mathcal{L}(A)$ atunci $f^2 \in \mathcal{L}(A)$ (vezi corolarul 2.1.10) şi atunci, din 1) şi 2), $f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f + g)^2 - (f - g)^2\right] \in \mathcal{L}(A)$. ∎

2.1.13 Definiţie. Fie $f : A \to \mathbb{R}$; vom defini $f^+, f^- : A \to \mathbb{R}$ prin $f^+ = \sup\{f, \underline{0}\}, f^- = \sup\{-f, \underline{0}\}$.

f^+ se numeşte partea pozitivă şi f^- partea negativă a funcţiei f.

Evident, $f = f^+ - f^-$ şi $|f| = f^+ + f^-$.

2.1.14 Propoziţie. *Fie $A \in \mathcal{L}$;*
1). $f \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}(A)$ şi $f^- \in \mathcal{L}(A)$.
2). $f \in \mathcal{L}(A) \Longrightarrow |f| \in \mathcal{L}(A)$.

Demonstraţie. 1). Dacă $f \in \mathcal{L}(A)$ atunci $f^+ \in \mathcal{L}(A)$ şi $f^- \in \mathcal{L}(A)$ din teorema 2.1.11; reciproca şi punctul 2) sunt asigurate de teorema precedentă.

2.2 Convergenţa şirurilor de funcţii măsurabile

Am introdus în paragraful precedent convergenţa aproape peste tot; reamintim că un şir (f_n) converge a.p.t. la o funcţie f pe mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ dacă $\lambda^*((f_n \nrightarrow f) \cap A) = 0$. Vom nota aceasta cu $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$.

Am arătat că, dacă $A \in \mathcal{L}, (f_n) \subseteq \mathcal{L}(A)$ şi $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ atunci $f \in \mathcal{L}(A)$ (vezi punctul (iii) al teoremei 2.1.6).

În acest paragraf vom mai introduce două tipuri de convergenţă pentru şirurile de funcţii măsurabile şi vom analiza legăturile între aceste convergenţe.

2.2.1 Definiţie. Fie $A \in \mathcal{L}, (f_n) \subseteq \mathcal{L}(A)$ şi $f \in \mathcal{L}(A)$;

1. (f_n) converge **aproape uniform** la f pe mulţimea A dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ a.î. $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[A \setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$.

   Vom nota aceasta cu $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$.

2. (f_n) converge **în măsură** la f pe mulţimea A dacă, $\forall \varepsilon > 0, \lim_n \lambda((|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$.

   Vom nota aceasta cu $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

   Şirul $(f_n)_n$ este **convergent în măsură** pe mulţimea A dacă există $f \in \mathcal{L}(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

3. (f_n) este şir **Cauchy în măsură** pe mulţimea A dacă, $\forall \varepsilon > 0, \lim_{m,n \to \infty} \lambda((|f_m - f_n| \geq \varepsilon)) = 0$.

2.2.2 Teoremă. *Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{L}(A)$ şi $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci:*

1). $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$;

2). $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$.

3). *Orice şir convergent în măsură pe A este Cauchy în măsură pe A.*

Demonstraţie. 1). Deoarece $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f, \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[A \setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$. Rezultă că, $\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î., $\forall n \geq n_0$ şi $\forall x \in A \setminus A_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \eta$ sau, altfel scris, $A \setminus A_\varepsilon \subseteq (|f_n - f| < \eta)$. Dacă complementariem

ultima incluziune obţinem: $(|f_n - f| \geq \eta) \subseteq A_\varepsilon$ de unde $\lambda(|f_n - f| \geq \eta) < \varepsilon$ şi deci $\lim_n \lambda(|f_n - f| \geq \eta) = 0, \forall \eta > 0$, ceea ce antrenează $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

2). Deoarece $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f, \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[A \setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$ de unde $(f_n)_n$ converge punctual la f pe $A \setminus A_\varepsilon$ sau $A \setminus A_\varepsilon \subseteq (f_n \to f)$. Dacă complementariem ultima incluziune obţinem: $(f_n \nrightarrow f) \subseteq A_\varepsilon$ şi deci $\lambda^*(f_n \nrightarrow f) \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Rezultă că $\lambda^*(f_n \nrightarrow f) = 0$ şi deci $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$.

3). Fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A)$ un şir convergent în măsură pe A; atunci există $f \in \mathcal{L}(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

Oricare ar fi $\varepsilon > 0, \lim_n \lambda((|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$; deci oricare ar fi $\eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, a.î., oricare ar fi $n \geq n_0, \lambda((|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2})) < \frac{\eta}{2}$. Fie acum $m, n \geq n_0$; deoarece $|f_m - f_n| \leq |f_m - f| + |f - f_n|$,

$$\left(|f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcap \left(|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq (|f_m - f_n| < \varepsilon),$$

sau, trecând la complementară,

$$(|f_m - f_n| \geq \varepsilon)) \leq \left(|f_m - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcup \left(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

şi deci

$$\lambda((|f_m - f_n| \geq \varepsilon)) \leq \lambda\left(\left(|f_m - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) + \lambda\left(\left(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) < \eta.$$

Rezultă că $\lim_{m,n\to\infty} \lambda((|f_m - f_n| \geq \varepsilon)) = 0$. ∎

Următoarele exemple arată că reciprocile implicaţiilor 1) şi 2) din teorema precedentă nu sunt adevărate.

2.2.3 Exemple. 1). Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n = \chi_{(n,+\infty)}$. Atunci $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\cdot} \underline{0}$ dar $(f_n)_n$ nu converge aproape uniform la $\underline{0}$.

2). $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k = 1, ..., n$ să notăm cu $f_{n,k} = \chi_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}$; să construim şirul (g_p) astfel:
$g_1 = f_{1,1}, g_2 = f_{2,1}, g_3 = f_{2,2}, ..., g_{\frac{n(n-1)}{2}+1} = f_{n,1}, ..., g_{\frac{n(n-1)}{2}+n} = f_{n,n}, ...$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n_p$ unic a.î. $\frac{n_p(n_p-1)}{2} < p \leq \frac{n_p(n_p+1)}{2}$ şi atunci $g_p = f_{n_p,k_p}$, unde $k_p = p - \frac{n_p(n_p-1)}{2} \in \{1, 2, ..., n_p\}$.

$\forall \varepsilon > 0, \lambda(|g_p| > \varepsilon) \leq \lambda(\frac{k_p-1}{n_p}, \frac{k_p}{n_p}) = \frac{1}{n_p} \to 0$; deci $g_p \xrightarrow[\mathbb{R}]{\lambda} \underline{0}$.

Pe de altă parte, $\forall x \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \exists k', k'' \in \{1, ..., n\}$ a.î. $x \in (\frac{k'-1}{n}, \frac{k'}{n}) \setminus (\frac{k''-1}{n}, \frac{k''}{n})$ şi deci există $p'_n = \frac{n(n-1)}{2} + k', p''_n = \frac{n(n-1)}{2} + k''$ a.î. $g_{p'_n}(x) = 1$ iar $g_{p''_n}(x) = 0$ ceea ce arată că $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Atunci (g_p) nu este convergent a.p.t. pe $(0,1)$ la $\underline{0}$ de unde rezultă că (g_p) nu este convergent a.u. pe $(0,1)$ la $\underline{0}$.

2.2.4 Teoremă. *Fie* $A \in \mathcal{L}, (f_n) \subseteq \mathcal{L}(A), f, g \in \mathcal{L}(A)$.

1). *Dacă* $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$ *atunci* $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} g \Longleftrightarrow f = g$ *a.p.t.*

2). *Dacă* $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ *atunci* $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} g \Longleftrightarrow f = g$ *a.p.t.*

3). *Dacă* $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$ *atunci* $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} g \Longleftrightarrow f = g$ *a.p.t.*

Demonstraţie. 1). $(\Longrightarrow)$: Presupunem că $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f, f_n \xrightarrow[A]{\lambda} g$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar; din inegalitatea $|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$ rezultă incluziunea $(|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}) \cap (|f_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq (|f - g| < \varepsilon)$. Prin complementariere obţinem $(|f - g| \geq \varepsilon) \subseteq (|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \cup (|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2})$ de unde, folosind monotonia şi proprietatea de finită subaditivitate a măsurii $\lambda(|f-g| \geq \varepsilon) \leq \lambda(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \lambda(|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2})$. Trecând la limită în inegalitatea precedentă rezultă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, $\lambda(|f - g| \geq \varepsilon) = 0$.

Pe de altă parte $\lambda(f \neq g) = \lambda(|f - g| > 0) = \lambda\left(\bigcup_{p=1}^{\infty}\left(|f-g| \geq \frac{1}{p}\right)\right) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \lambda\left(|f - g| \geq \frac{1}{p}\right) = 0$ şi deci $f = g$ a.p.t.

$(\Longleftarrow)$: Presupunem că $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$ şi că $f = g$ a.p.t. Pentru orice $\varepsilon > 0, (|f_n - g| \geq \varepsilon) \subseteq (|f_n - f| \geq \varepsilon) \cup (f \neq g)$; aplicând proprietăţile de monotonie şi de finită aditivitate ale măsurii obţinem $\lambda(|f_n - g| \geq \varepsilon) \leq \lambda(|f_n - f| \geq \varepsilon)$ şi, trecând la limită, $\lim_n \lambda(|f_n - g| \geq \varepsilon) = 0$.

2). $(\Longrightarrow)$: Din incluziunea $(f \neq g) \subseteq (f \nrightarrow f) \cup (f_n \nrightarrow g)$ şi din proprietăţile măsurii λ rezultă că $\lambda(f \neq g) = 0$.

$(\Longleftarrow)$: Incluziunea $(f_n \nrightarrow g) \subseteq (f_n \nrightarrow f) \cup (f \neq g)$ ne conduce la $\lambda(f_n \nrightarrow g) = 0$.

3). $(\Longrightarrow)$: Dacă $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$ şi $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} g$ atunci, din punctul 2) al teoremei 2.2.2, $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ şi $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} g$. Conform punctului precedent $f = g$ a.p.t.

$(\Longleftarrow)$: Presupunem că $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$ şi că $f = g$ a.p.t.; oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ a.î. $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[A \setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$. Atunci $f_n \xrightarrow[A \setminus (A_\varepsilon \cup (f \neq g))]{\text{u}} f$ şi, deoarece $\lambda(A_\varepsilon) = \lambda(A_\varepsilon \cup (f \neq g)) < \varepsilon$, rezultă că $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} g$. ∎

2.2.5 Teoremă (Riesz).

1). Orice şir Cauchy în măsură pe o mulţime $A \in \mathcal{L}$ are un subşir convergent aproape uniform pe A.

2). $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f \Longrightarrow \exists k_n \uparrow +\infty$ a.î. $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$.

3). Orice şir Cauchy în măsură pe o mulţime $A \in \mathcal{L}$ este convergent în măsură pe A.

Demonstraţie. 1). Fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A)$ un şir Cauchy în măsură pe A; $\forall \varepsilon > 0, \lim_{m,n\to+\infty} \lambda(|f_n - f_m| \geq \varepsilon) = 0$. Deci $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall k \geq k_\varepsilon, \lambda(|f_k - f_{k_\varepsilon}| \geq \varepsilon) < \varepsilon$. Să dăm pe rând lui ε valori în mulţimea $\{\frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N}\}$.

(0) $\varepsilon = 1, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0, \lambda(|f_k - f_{k_0}| \geq 1) < 1,$

(1) $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists k_1 \in \mathbb{N}, k_1 > k_0, \forall k > k_1, \lambda(|f_k - f_{k_1}| \geq \frac{1}{2}) < \frac{1}{2},$

$\ldots$

(n) $\varepsilon = \frac{1}{2^n}, \exists k_n \in \mathbb{N}, k_n > k_{n-1}, \forall k > k_n, \lambda(|f_k - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n},$

$\ldots$

Dacă în relaţia (n) înlocuim $k = k_{n+1} > k_n$, atunci obţinem $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda(|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n}$.

Să notăm, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \bigcup_{i=n}^\infty (|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}| \geq \frac{1}{2^i})$ şi să observăm că $\lambda(B_n) \leq \sum_{i=n}^\infty \lambda(|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}| \geq \frac{1}{2^i}) < \sum_{i=n}^\infty \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Fie $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$; atunci, $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(B) \leq \lambda(B_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ de unde rezultă că $\lambda(B) = 0$.

Oricare ar fi $x \in A \setminus B = \bigcup_{n=1}^\infty (A \setminus B_n), \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x \in A \setminus B_{n_0}$; deci, $\forall n \geq n_0, |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^n}$. Atunci, $\forall n > m \geq n_0, |f_{k_n}(x) - f_{k_m}(x)| \leq |f_{k_n}(x) - f_{k_{n-1}}(x)| + \cdots + |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{m-1}}$. Rezultă că şirul $(f_{k_n}(x))_n$ este şir Cauchy în $\mathbb{R}$ şi deci există $\lim_n f_{k_n}(x) \in \mathbb{R}$.

Definim $f : A \to \mathbb{R}$ prin $f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x), & x \in A \setminus B \\ 0, & x \in B \end{cases}$.

Atunci $f \in \mathcal{L}(A)$; vom arăta că $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfsfel încât $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$; atunci $\lambda(B_{n_0}) < \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$.

Să arătăm că $f_{k_n} \xrightarrow[A\setminus B_{n_0}]{\text{u}} f$.

Oricare ar fi $x \in A \setminus B_{n_0} = \bigcap_{n=n_0}^\infty (|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| < \frac{1}{2^n}), |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^n}, \forall n \geq n_0$; atunci, ca şi mai sus, $\forall n > m \geq n_0, |f_{k_n}(x) - f_{k_m}(x)| < \frac{1}{2^{m-1}}$. Observăm că $x \in A \setminus B_{n_0} \subseteq A \setminus B$ şi deci $\lim_n f_{k_n}(x) = f(x)$. Dacă trecem la limită pentru $n \to \infty$ în inegalitatea de mai sus obţinem

$$|f(x) - f_{k_m}(x)| < \frac{1}{2^{m-1}}, \forall m \geq n_0, \forall x \in A \setminus B_{n_0},$$

ceea ce ne asigură că $f_n \xrightarrow[A\setminus B_{n_0}]{\text{u}} f$.

2). Dacă $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$ atunci, din punctul 3) al teoremei 2.2.2, $(f_n)_n$ este Cauchy în măsură pe A. Am demonstrat mai sus că, în acest caz, $(f_n)_n$ admite un subşir $(f_{k_n})_n$ convergent aproape uniform la o funcţie $g \in \mathcal{L}(A)$. Acest subşir va converge şi în măsură la g (vezi punctul 1) al teoremei 2.2.2). Pe de altă parte $(f_{k_n})_n$ converge în măsură şi la f (orice subşir al unui şir convergent în măsură converge în măsură la aceeaşi funcţie). Din punctul 1) al teoremei 2.2.4 rezultă că $f = g$ a.p.t. şi din punctul 3) al aceleiaşi teoreme, $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$.

3). Orice şir Cauchy în măsură, $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A)$, admite, din punctul 1), un subşir $(f_{k_n})_n$ convergent aproape uniform pe A la o funcţie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\lambda} f$. Deoarece $|f_n - f| \leq |f_n - f_{k_n}| + |f_{k_n} - f|$, rezultă că, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\left(|f_n - f_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(|f_{k_n} - f| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq (|f_n - f| < \varepsilon)$$

de unde, trecând la complementară,

$$(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subseteq \left(|f_n - f_{k_n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|f_{k_n} - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

sau

$$\lambda(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \lambda\left(|f_n - f_{k_n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \lambda\left(|f_{k_n} - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Deoarece $(f_n)_n$ este şir Cauchy în măsură iar $(f_{k_n})_n$ converge în măsură la f pe A, termenii sumei din membrul doi al inegalităţii de mai sus converg la 0 şi deci $(f_n)_n$ converge în măsură la f pe mulţimea A. ∎

2.2.6 Teoremă (Egorov). *Fie $A \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A) < +\infty$ şi fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A), f \in \mathcal{L}(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$; atunci $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$.*

Demonstraţie. Să presupunem deci că $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$. Dacă $B = (f_n \not\to f)$ atunci $B \in \mathcal{L}$ şi $\lambda(B) = 0$.

$\forall k, m \in \mathbb{N}^*$, notăm cu:

$$E_{k,m} = \left\{x \in A \setminus B : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \forall n \geq k\right\}.$$

Observăm că $E_{k,m} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \left(|f_n - f| < \frac{1}{m}\right) \setminus B$. Deoarece $|f_n - f| \in \mathcal{L}(A)$, rezultă că $E_{k,m} \in \mathcal{L}, \forall k, m \in \mathbb{N}^*$. În plus, $E_{k,m} \subseteq E_{k+1,m} \subseteq A \setminus B, \forall k, m \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in A \setminus B, f_n(x) \to f(x)$ şi deci $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq$ $\geq k_0, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$, sau $x \in E_{k_0,m}$. Rezultă că $\forall m \in \mathbb{N}^*$, şirul

$(E_{k,m})_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un şir crescător şi $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,m} = A \setminus B$. Folosim acum proprietatea de continuitate a măsurii pe şiruri ascendente şi obţinem

$$\lambda(A \setminus B) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(E_{k,m}), \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Dar $\lambda(A \setminus B) = \lambda(A) < +\infty$ şi deci $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists k_m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|\lambda(A \setminus E_{k_m,m})| = |\lambda(A) - \lambda(E_{k_m,m})| < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Acum, $\forall \varepsilon > 0$, notăm $A_\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty}(A \setminus E_{k_m,m})$. Rezultă că $\lambda(A_\varepsilon) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(A \setminus E_{k_m,m}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon$.

$\forall x \in A \setminus A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k_m,m}, \forall m \in N^*, \forall n \geq k_m, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$. Atunci $\forall \eta > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{m_0} < \eta$. Deci $\exists n_\varepsilon = k_{m_0} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in A \setminus A_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m_0} < \eta$, de unde rezultă că $f_n \xrightarrow[A\setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$. Deci $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$. ∎

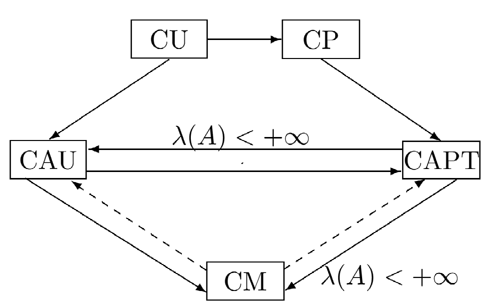
2.2.7 Corolar.

1). $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f \Longrightarrow \exists k_n \uparrow +\infty$ *a.î.* $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\cdot} f$.

2). $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ *şi* $\lambda(A) < +\infty \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

2.2.8 Exemplu. Fie $f_n = \chi_{[n,\, n+1]}$; atunci (f_n) converge punctual la funcţia identic nulă pe $\mathbb{R}$ dar şirul nu converge în măsură la această funcţie.

Figura următoare ilustrează relaţiile între diversele tipuri de convergenţă definite; săgeata punctată indică convergenţa pe subşiruri.



2.3 Structura funcţiilor măsurabile

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$; vom nota cu χ_A funcţia caracteristică a mulţimii A; deci $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Dacă $B \subseteq A$ atunci $\chi_B \leq \chi_A$. În cele ce urmează vom identifica, fără pericol de confuzie, funcţia χ_B cu restricţia ei la mulţimea A: $\chi_B\big|_A : A \to \{0,1\}$.

Să remarcăm că, dacă $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ este o familie arbitrară (finită sau infinit numărabilă) de mulţimi disjuncte două câte două ($A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in I, i \neq j$) atunci $\chi_{\cup_{i\in I} A_i} = \sum_{i\in I} \chi_{A_i}$.

2.3.1 Definiţie. Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$; funcţia f se numeşte **funcţie etajată** pe mulţimea A dacă $f(A) = \{a_1, ..., a_p\} \subseteq \mathbb{R}$ şi, $\forall i \in \{1, ..., p\}, A_i = f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{L}$.

În această situaţie $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \chi_{A_i}$ (aşa cum am menţionat mai sus, funcţiile caracteristice ale mulţimilor A_i sunt gândite ca funcţii definite pe A); dacă printre valorile a_i presupunem că există şi 0, atunci familia $\{A_1, ..., A_p\}$ formează o partiţie a mulţimii A ($A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ şi $\cup_{i=1}^{p} A_i = A$).

Vom nota cu $\mathcal{E}(A)$ mulţimea funcţiilor etajate pe A.

Observăm că $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{L}(A)$; într-adevăr, oricare ar fi $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{E}(A)$ şi oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, (f < a) = f^{-1}(-\infty, a) = \cup_{a_i<a} A_i \in \mathcal{L}$.

2.3.2 Propoziţie. *$\mathcal{E}(A)$ este subspaţiu vectorial real al spaţiului $\mathcal{L}(A)$.*

Demonstraţie. Fie $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \chi_{A_i}, g = \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot \chi_{B_j} \in \mathcal{E}(A)$; atunci $f + g = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot (\sum_{j=1}^{q} \chi_{A_i \cap B_j}) + \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot (\sum_{i=1}^{p} \chi_{B_j \cap A_i}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (a_i + b_j) \cdot \chi_{A_i \cap B_j} \in \mathcal{E}(A)$ şi, oricare ar fi $c \in \mathbb{R}, c \cdot f = \sum_{i=1}^{p} (ca_i) \cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{E}(A)$.

2.3.3 Teoremă (de aproximare a funcţiilor măsurabile). *Fie $A \in \mathcal{L}$;*

1). $f : A \to \mathbb{R}_+, f \in \mathcal{L}_+(A) \Longrightarrow \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}_+(A), f_n \uparrow f$.

2). $f \in \mathcal{L}(A) \Longrightarrow \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}(A), f_n \xrightarrow[A]{p} f$.

3). $f \in \mathcal{L}(A), f$ *mărginită* $\Longrightarrow \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}(A), f_n \xrightarrow[A]{u} f$.

1). Vom presupune întâi că $f : A \to \mathbb{R}_+$ este măsurabilă şi pozitivă. Să observăm că $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \cup [n, +\infty).$$

Atunci:

$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \cup f^{-1}\left([n, +\infty)\right).$$

Să observăm că, deoarece $f \in \mathcal{L}(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, ..., n2^n - 1$,

$$A_{k,n} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}. \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \in \mathcal{L}.$$

Vom defini atunci, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{A_{k,n}}.$$

Observăm că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}(A)$ şi $f_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Vom arăta că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi converge punctual la f.

$\forall x \in A, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, a.î. $f(x) < n, \forall n \geq n_0$. Atunci $f(x) \in [0, n)$ deci $\exists k \in \{0, ..., n2^n - 1\}$ a.î. $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$.

Pe de o parte $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Pe de altă parte $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$, de unde $f_{n+1}(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x)$.

În plus $0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}, \forall n \geq n_0$, ceea ce antrenează $f_n(x) \to f(x)$.

Să observăm că, dacă f este în plus şi mărginită pe A, atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x) < n_0, \forall x \in A$. Rezultă atunci că $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \forall n \geq n_0, \forall x \in A$, de unde $f_n \xrightarrow[A]{\text{u}} f$.

2). Fie acum $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă oarecare. Atunci $f^+ = \sup\{f, \underline{0}\}$ şi $f^- = \sup\{-f, \underline{0}\}$ sunt funcţii măsurabile şi pozitive (vezi propoziţia 2.1.14). Conform primei părţi, $\exists (g_n), (h_n) \subseteq \mathcal{E}(A)$ a.î. $g_n \uparrow f^+$ şi $h_n \uparrow f^-$. Fie $f_n = g_n - h_n \in \mathcal{E}(A), \forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $(f_n)_n$ converge punctual pe A la $f^+ - f^- = f$. În plus $|f_n| \leq g_n + h_n \leq f^+ + f^- = |f|$ şi $|f_n| \uparrow |f|$.

3). Dacă f este şi mărginită, atunci f^+ şi f^- sunt mărginite şi deci, din 1), $g_n \xrightarrow[A]{\text{u}} f^+$ şi $h_n \xrightarrow[A]{\text{u}} f^-$, de unde $f_n \xrightarrow[A]{\text{u}} f$. ■

Observăm din teorema precedentă şi din punctul 5) al teoremei 2.1.11 că

$$f \in \mathcal{L}(A) \Longleftrightarrow \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}(A) \text{ a.î. } f_n(x) \to f(x), \forall x \in A.$$

Funcţiile care sunt limite în măsură de şiruri de funcţii etajate formează o submulţime importantă a clasei funcţiilor măsurabile.

2.3.4 Definiţie. Fie $A \in \mathcal{L}$; funcţia $f \in \mathcal{L}(A)$ se numeşte **total măsurabilă** pe A dacă există un şir $(f_n) \subseteq \mathcal{E}(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

Vom nota cu $\mathcal{L}_t(A)$ clasa funcţiilor total măsurabile pe A.

2.3.5 Teoremă. *Fie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci*
$f \in \mathcal{L}_t(A) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ *a.î.* $\lambda(|f| > k) < \varepsilon$.

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$; teorema lui Riesz (teorema 2.2.5) ne asigură existenţa unui subşir $k_n \uparrow +\infty$ a.î. $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$ a.î. $f_{k_n} \xrightarrow[A \setminus A_\varepsilon]{u} f$. Funcţiile f_{k_n} fiind etajate sunt mărginite şi, deoarece convergenţa uniformă conservă mărginirea, f este mărginită pe $A \setminus A_\varepsilon$. Deci există $k > 0$ a.î., oricare ar fi $x \in A \setminus A_\varepsilon, |f(x)| \leq k$ sau, echivalent, $A \setminus A_\varepsilon \subseteq (|f| \leq k)$. Complementariind ultima relaţie obţinem $(|f| > k) \subseteq A_\varepsilon$ şi, utilizând monotonia măsurii, $\lambda(|f| > k) < \varepsilon$.

($\Longleftarrow$): Din punctul 2). al teoremei 2.3.3, există un şir $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(A)$ a.î. $(f_n)_n$ converge punctual la f pe A. Presupunem că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $k > 0$ a.î. $\lambda(|f| > k) < \varepsilon$. Fie $A_\varepsilon = (|f| > k) \in \mathcal{L}$; atunci f este mărginită pe $A \setminus A_\varepsilon$ şi deci, conform punctului 3). al teoremei 2.3.3, $f_n \xrightarrow[A \setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$. Atunci $f_n \xrightarrow[A]{\text{a.u.}} f$ şi, din punctul 1) al teoremei 2.2.2, $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$ deci $f \in \mathcal{L}_t(A)$. ∎

2.3.6 Observaţii. (i) Teorema precedentă afirmă că o funcţie este total măsurabilă pe A dacă şi numai dacă este măsurabilă şi asimptotic mărginită pe A: $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ a.î. $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi f este mărginită pe $A \setminus A_\varepsilon$ $(A_\varepsilon = (|f| > k))$.

Evident că o funcţie mărginită pe A este total măsurabilă dacă şi numai dacă este măsurabilă.

(ii) Dacă $\lambda(A) < +\infty$ atunci $\mathcal{L}_t(A) = \mathcal{L}(A)$. Într-adevăr, fie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci $\bigcap_{n=0}^{\infty}(|f| \geq n) = \emptyset$ şi, deoarece $\lambda(A) < +\infty$, putem aplica proprietatea de continuitate a măsurii pe şiruri descendente (punctul 7) al teoremei 1.3.11). Deci $\lim_n \lambda(|f| \geq n) = 0$. Rezultă că, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\lambda(|f| \geq n_0) < \varepsilon$. Funcţia f este deci asimptotic mărginită pe A şi deci $f \in \mathcal{L}_t(A)$.

(iii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$, este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci este măsurabilă; f nu este însă asimptotic mărginită pe $\mathbb{R}$ $(\forall k > 0, \lambda(|f| > k) = +\infty)$ şi deci nu este total măsurabilă. Şirul de funcţii etajate (f_n), definite prin $f_n = \displaystyle\sum_{k=-n.2^n}^{n.2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}$, converge punctual la f pe $\mathbb{R}$.

2.3.7 Teoremă (Luzin). *Fie* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$*; pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există o submulţime închisă a lui* $\mathbb{R}$*,* F_ε*, a.î.* $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ *şi* $f|_{F_\varepsilon}$ *este funcţie continuă.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema în trei etape.

I. $f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Atunci $\forall k \neq l, a_k \neq a_l, A_k \cap A_l = \emptyset, A_k \in \mathcal{L}$, şi $\bigcup_{k=1}^n A_k = \mathbb{R}$.

Exerciţiul 12 de la 1.5 ne asigură că, $\forall \varepsilon > 0, \forall k = 1, ..., n, \exists F_k = \overline{F_k} \subseteq A_k$ a.î. $\lambda(A_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Fie $F_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^n F_k$; atunci $F_\varepsilon = \overline{F_\varepsilon}$ şi

$$\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \setminus F_\varepsilon\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(A_k \setminus F_\varepsilon) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \lambda(A_k \setminus F_k) < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Fie $g = f|_{F_\varepsilon}$, fie $x_0 \in F_\varepsilon$ şi fie $(x_n)_n \subseteq F_\varepsilon, x_n \to x_0$. Atunci există $i \in \{1, \cdots, n\}$ a.î. $x_0 \in F_i$. Rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \in F_i, \forall n \geq n_0$ (dacă am presupune că o infinitate din termenii şirului $(x_n)_n$ s-ar afla în altă mulţime F_j atunci, cum F_j este închisă, ar rezulta că $x_0 \in F_j$ ceea ce este imposibil deoarece $F_i \cap F_j = \emptyset$).

Dar pe F_i funcţia g este constantă şi deci, oricare ar fi $n \geq n_0, g(x_n) = a_i \to a_i = g(x_0)$. Rezultă că g este continuă pe F_ε.

II. $f \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R})$.

Funcţia f este limita în măsură a unui şir de funcţii etajate. Din teorema lui Riesz (teorema 2.2.5) acest şir admite un subşir convergent aproape uniform la f. Fie deci $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}), f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\text{a.u.}} f$; $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4}$ şi $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}\setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$. $\exists D_\varepsilon \in \tau_u$ a.î. $A_\varepsilon \subseteq D_\varepsilon$ şi $\lambda(D_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4}$; atunci $\lambda(D_\varepsilon) = \lambda(A_\varepsilon) + \lambda(D_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Din prima etapă a demonstraţiei, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists F_n^\varepsilon$, mulţime închisă, a.î. $f_n|_{F_n^\varepsilon}$ este continuă şi $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_n^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Fie acum $D = D_\varepsilon \cup \bigcup_{n=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus F_n^\varepsilon) \in \tau_u$. Mulţimea $F_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus D$ este atunci închisă şi $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) = \lambda(D) \leq \lambda(D_\varepsilon) + \sum_{n=1}^\infty \lambda(\mathbb{R} \setminus F_n^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Din definiţie, $F_\varepsilon = (\mathbb{R} \setminus D_\varepsilon) \cap \bigcap_{n=1}^\infty F_n^\varepsilon \subseteq (\mathbb{R} \setminus A_\varepsilon) \cap \bigcap_{n=1}^\infty F_n^\varepsilon$. Rezultă că $f_n \xrightarrow[F_\varepsilon]{\text{u}} f$ şi $f_n|_{F_\varepsilon}$ este continuă (în topologia relativă a lui F_ε), $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proprietatea de conservare a continuităţii prin convergenţa uniformă ne asigură atunci că $f|_{F_\varepsilon}$ este continuă.

III. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

λ fiind măsură σ–finită, $\exists (D_n) \subseteq \tau_u$ a.î. $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ şi $\lambda(D_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă din punctul (ii) al observaţiei 2.3.6 că $f \cdot \chi_{D_n} \in$

$\mathcal{L}_t(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, din etapa II, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists F_n^\varepsilon = \overline{F_n^\varepsilon} \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $f \cdot \chi_{D_n}|_{F_n^\varepsilon}$ este continuă şi $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_n^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Fie $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n^\varepsilon$; rezultă că $F = \overline{F}$ şi $\lambda(\mathbb{R} \setminus F) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus F_n^\varepsilon)\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda(\mathbb{R} \setminus F_n^\varepsilon) < \varepsilon$. Să arătăm că $f|_F$ este continuă.

$\forall x_0 \in F, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x_0 \in D_{n_0}$. Să notăm cu $g = f \cdot \chi_{D_{n_0}}|_{F_{n_0}^\varepsilon}$ despre care ştim că este continuă în topologia relativă a lui $F_{n_0}^\varepsilon$. Deci $\forall \eta > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in F_{n_0}^\varepsilon$ cu $|x - x_0| < \delta$, $|g(x) - g(x_0)| < \eta$. δ poate fi ales suficient de mic a.î. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_{n_0}$. Atunci $\forall x \in F \subseteq F_{n_0}^\varepsilon$ cu $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $x \in D_{n_0}$ şi astfel $|f(x) - f(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \eta$. Deci $f|_F$ este funcţie continuă. ∎

2.3.8 Corolar. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime închisă $F_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f|_{A \cap F_\varepsilon}$ este continuă.*

Demonstraţie. Funcţia $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

este măsurabilă pe $\mathbb{R}$ (vezi problema 5) de la 2.5).

Din teorema precedentă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime închisă $F_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $\bar{f}|_{F_\varepsilon}$ este continuă. Mulţimea închisă F_ε verifică concluzia corolarului. ∎

Vom prezenta în continuare încă o teoremă de aproximare a funcţiilor măsurabile cu funcţii continue.

2.3.9 Teoremă (Borel). *Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon$, o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, a.î. $\lambda^*(f \neq f_\varepsilon) < \varepsilon$.*

În plus f_ε se poate alege a.î. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ şi fie $\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \in [0, +\infty]$; atunci $f(\mathbb{R}) \subseteq I = [-\alpha, \alpha]$. Conform teoremei lui Luzin, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulţime închisă $F_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f|_{F_\varepsilon}$ este continuă; $f(F_\varepsilon) \subseteq [-\alpha, \alpha]$. Vom utiliza acum o teoremă clasică de topologie, teorema lui Tietze: orice funcţie continuă pe o submulţime închisă a lui $\mathbb{R}$ cu valori într-un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ se poate prelungi la o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ cu valori în acelaşi interval I (vezi pentru demonstraţie teorema 1.8.9 din [3]). Fie deci $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to I$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ a.î. f_ε coincide cu f pe F_ε. Evident că $\lambda^*(f \neq f_\varepsilon) \leq \lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)| \leq \alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. ∎

În acelaşi mod în care am demonstrat corolarul teoremei lui Luzin se poate arăta:

2.3.10 Corolar. *Fie* $A \in \mathcal{L}$ *şi* $f \in \mathcal{L}(A)$*; atunci,* $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon$*, o funcţie continuă pe* A*, a.î.* $\lambda^*(f \neq f_\varepsilon) < \varepsilon$*.*

În plus f_ε *se poate alege a.î.* $\sup_{x\in A} |f_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x)|$.

2.3.11 Exemplu. Fie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mulţimea numerelor raţionale; ştim că $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{L}$ (vezi (ii) din exemplul 1.2.11 şi (i) din teorema 1.3.3) şi deci $\chi_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ (exemplul 2.1.2). Dacă $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ..., q_n, ...\}$, atunci notăm, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n^\varepsilon = \left(q_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$. Atunci $\mathbb{Q} \subseteq \cup_{n=1}^\infty I_n^\varepsilon = D_\varepsilon \in \tau_u$. Mulţimea $F_\varepsilon = \mathbb{R}\backslash D_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ este închisă, $\lambda(\mathbb{R}\backslash F_\varepsilon) = \lambda(D_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ şi $\chi_{\mathbb{Q}}$, fiind constantă egală cu zero pe F_ε, este continuă pe F_ε.

Observăm că funcţia $\chi_{\mathbb{Q}}$ nu este continuă în nici-un punct din $\mathbb{R}$.

Funcţia $f_\varepsilon = \underline{0}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $\lambda^*(\chi_{\mathbb{Q}} \neq f_\varepsilon) = 0 < \varepsilon$.

Şirul (f_n), definit prin $f_n = \underline{0}, \forall n \in \mathbb{N}$, este un şir de funcţii continue convergent a.p.t. la $\chi_{\mathbb{Q}}$.

2.4 Cadru abstract

Ca şi la sfârşitul capitolului 1, vom prezenta funcţiile măsurabile şi proprietăţile lor în cazul unui spaţiu cu măsură abstract.

2.4.1 Definiţie. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură σ-finită şi completă; funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ este **măsurabilă** dacă, $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{A}$.

Vom nota cu $\mathcal{M}(X)$ (sau pur şi simplu cu $\mathcal{M}$, când nu este pericol de confuzie) clasa tuturor funcţiilor măsurabile pe X.

Oricare ar fi $A \subseteq X, \chi_A \in \mathcal{M} \iff A \in \mathcal{A}$.

O funcţie **$\mathcal{A}$-etajată** (sau, dacă nu este pericol de confuzie, etajată) este o funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ pentru care $f(X) = \{a_1, ..., a_p\} \subseteq \mathbb{R}$ şi $A_i = f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{A}, \forall i = 1, ..., p$. Vom nota cu $\mathcal{E}(X)$ clasa funcţiilor etajate; $\forall f \in \mathcal{E}(X), f = \sum_{i=1}^p a_i \cdot \chi_{A_i}$, unde $\{A_1, ..., A_p\}$ formează o partiţie $\mathcal{A}$-măsurabilă pentru X. Evident $\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{M}(X)$.

Dacă X este dotat cu o topologie τ a.î. $\tau \subseteq \mathcal{A}$ atunci funcţiile reale continue pe (X, τ) sunt măsurabile ($C(X) \subseteq \mathcal{M}(X)$).

Dacă înlocuim corespunzător A cu X, $\mathcal{L}$ cu $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{L}(A)$ cu $\mathcal{M}(X)$ atunci se păstrează rezultatele 2.1.3, 2.1.11, 2.1.6, 2.1.12 şi 2.1.14.

2.4.2 Teoremă. *Fie* $f : X \to \mathbb{R}$*; următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1). $f \in \mathcal{M}(X)$.
2). $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.
3). $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.
4). $f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.
5). $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}, \forall I \in \mathcal{I}$.
6). $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}, \forall D \in \tau_u$.
7). $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}_u$.

2.4.3 Teoremă. *Fie* $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(X)$*; atunci:*
1). $f = \sup_n f_n \in \mathcal{M}(X)$, *dacă* $\sup_n f_n(x) < +\infty, \forall x \in X$;
2). $f = \inf_n f_n \in \mathcal{M}(X)$, *dacă* $\inf_n f_n(x) > -\infty, \forall x \in X$;
3). $f = \limsup_n f_n \in \mathcal{M}(X)$, *dacă* $\limsup_n f_n(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$;
4). $f = \liminf_n f_n \in \mathcal{M}(X)$, *dacă* $\liminf_n f_n(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$;
5). $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X \Longrightarrow f \in \mathcal{M}(X)$.
6). $f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f \Longrightarrow f \in \mathcal{M}(X)$.

2.4.4 Teoremă. *Fie* $f, g : X \to \mathbb{R}$.
1). *Dacă* $f \in \mathcal{M}(X)$ *şi* $f = g$ *a.p.t., atunci* $g \in \mathcal{M}(X)$.
2). *Dacă* f *este continuă a.p.t. pe* X *atunci* $f \in \mathcal{M}(X)$.

2.4.5 Teoremă. *Fie* $f, g \in \mathcal{M}(X)$ *şi fie* $\alpha \in \mathbb{R}$*; atunci* $f + g \in \mathcal{M}(X), \alpha \cdot f \in \mathcal{M}(X)$ *şi* $f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$.

2.4.6 Propoziţie.
1). $f \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{M}(X)$ *şi* $f^- \in \mathcal{M}(X)$.
2). $f \in \mathcal{M}(X) \Longrightarrow |f| \in \mathcal{M}(X)$.

Se pot defini, la fel ca în 2.2.1, convergenţa în măsură şi convergenţa aproape uniformă şi se regăsesc rezultatele 2.2.2, 2.2.4 - 2.2.7.

2.4.7 Definiţie. Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(X)$ şi $f \in \mathcal{M}(X)$;

1. (f_n) converge **aproape uniform** la f pe mulţimea X dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ a.î. $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[X \setminus A_\varepsilon]{\text{u}} f$.

   Vom nota aceasta cu $f_n \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} f$.

2. (f_n) converge **în măsură** la f pe mulţimea X dacă, $\forall \varepsilon > 0, \lim_n \mu((|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$.

   Vom nota aceasta cu $f_n \xrightarrow[X]{\mu} f$.

   Şirul $(f_n)_n$ este **convergent în măsură** pe mulţimea X dacă există $f \in \mathcal{M}(X)$ a.î. $f_n \xrightarrow[X]{\mu} f$.

3. (f_n) este şir **Cauchy în măsură** pe mulţimea X dacă,
$\forall \varepsilon > 0, \lim_{m,n\to\infty} \mu((|f_m - f_n| \geq \varepsilon)) = 0$.

2.4.8 Teoremă. *Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(X)$ şi $f \in \mathcal{M}(X)$; atunci:*
1). $f_n \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[X]{\mu} f$;
2). $f_n \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f$.
3). *Orice şir convergent în măsură pe X este Cauchy în măsură pe X.*

2.4.9 Teoremă. *Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(X), f, g \in \mathcal{M}(X)$.*
1). *Dacă $f_n \xrightarrow[X]{\mu} f$ atunci $f_n \xrightarrow[X]{\mu} g \Longleftrightarrow f = g$ a.p.t.*
2). *Dacă $f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f$ atunci $f_n \xrightarrow[X]{\mu} g \Longleftrightarrow f = g$ a.p.t.*
3). *Dacă $f_n \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} f$ atunci $f_n \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} g \Longleftrightarrow f = g$ a.p.t.*

2.4.10 Teoremă (Riesz).
1). Orice şir Cauchy în măsură pe X are un subşir convergent aproape uniform pe X.
2). $f_n \xrightarrow[X]{\mu} f \Longrightarrow \exists k_n \uparrow +\infty$ a.î. $f_{k_n} \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} f$.
3). Orice şir Cauchy în măsură pe X este convergent în măsură pe X.

2.4.11 Teoremă (Egorov). *Dacă $\mu(X) < +\infty$ şi $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}(X), f \in \mathcal{M}(X)$ a.î. $f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f$, atunci $f_n \xrightarrow[X]{\text{a.u.}} f$.*

2.4.12 Corolar.
1). $f_n \xrightarrow[X]{\mu} f \Longrightarrow \exists k_n \uparrow +\infty$ a.î. $f_{k_n} \xrightarrow[X]{\cdot} f$.
2). $f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f$ şi $\mu(X) < +\infty \Longrightarrow f_n \xrightarrow[X]{\mu} f$.

În acest cadru abstract se poate demonstra de asemenea teorema de aproximare a funcţiilor măsurabile cu funcţii etajate (vezi teorema 2.3.3).

2.4.13 Teoremă.
1). $f : X \to \mathbb{R}_+, f \in \mathcal{M}_+(X) \Longrightarrow \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}_+(X), f_n \uparrow f$.
2). $f \in \mathcal{M}(X) \Longrightarrow \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}(X), f_n \xrightarrow[X]{p} f$.
3). $f \in \mathcal{M}(X), f$ *mărginită* $\Longrightarrow \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}(X), f_n \xrightarrow[X]{u} f$.

2.5 Exerciţii

1). Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ un şir disjunct de mulţimi măsurabile ($A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$) şi fie $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \chi_{A_n}(x), \forall x \in \mathbb{R}$, este măsurabilă.

2). Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime ne-măsurabilă Lebesgue ($A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$) şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţia definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \notin A \end{cases}$. Să se arate că $|f| \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ dar $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

3). Să se cerceteze dacă funcţia lui Riemann: $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in [0,1], p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*, (p,q) = 1 \end{cases}$, este măsurabilă Lebesgue.
Indicaţie. Se va arăta că f este continuă în toate punctele iraţionale şi în 0 şi este discontinuă în punctele raţionale ale lui $[0,1]$.

4). Fie $f : A \to \mathbb{R}$ şi $B, C \in \mathcal{L}$ a.î. $A = B \cup C$; să se arate că $f \in \mathcal{L}(A)$ dacă şi numai dacă $f \in \mathcal{L}(B)$ şi $f \in \mathcal{L}(C)$.

5). Fie $f : A \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}(A)$ şi fie $B \in \mathcal{L}(A)$; atunci funcţia $g : A \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \setminus B \\ f(x), & x \in B \end{cases}$, este măsurabilă Lebesgue.

6). Fie $f : [0, \frac{1}{\pi}] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, \frac{1}{\pi}] \end{cases}$.
Să se arate că $f \in \mathcal{L}([0, \frac{1}{\pi}])$ şi să se calculeze $\lambda(f \geq 0)$.

7). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x+a), \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

8). Fie $I \in \mathcal{I}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe tot intervalul deschis I; să se arate că derivata lui f, f', este măsurabilă Lebesgue.
Indicaţie. Se va arăta că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$.

9). Fie $A \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}(A)$ şi $a \in \mathbb{R}$; arătaţi că $(f = \underline{a}) = \{x \in A : f(x) = a\} \in \mathcal{L}$.

10). Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f, g \in \mathcal{L}(A)$; arătaţi că $(f < g) = \{x \in A : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{L}$.

11). Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f \in \mathcal{L}(A)$; definim $\|f\| = \inf\{\varepsilon + \lambda(|f| > \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.
Arătaţi că:
a). $\|f\| = 0 \iff f = \underline{0}$ a.p.t.,
b). $\|-f\| = \|f\|, \forall f \in \mathcal{L}(A)$,
c). $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in \mathcal{L}(A)$,
d). $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f \iff \|f_n - f\| \to 0, \forall (f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A), f \in \mathcal{L}(A)$.

12). Să cerceteze dacă şirurile următoare sunt convergente a.p.t., aproape uniform sau în măsură pe mulţimile lor de definiţie:

a). $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,\, n]}$.

b). $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = n \cdot e^{-nx} \cdot \chi_{[0,\, +\infty)}(x)$.

c). $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n = n \cdot \chi_{[0,\, \frac{1}{n}]}$.

d). $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n}{1+n\sqrt{x}}$.

13). Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ la o funcţie măsurabilă Lebesgue.

14). Arătaţi că şirul $(f_n)_n \subseteq \mathbb{R}, f_n(x) = \sin nx$, nu converge în măsură la $\underline{0}$.

15). Fie $A \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A) < +\infty$.

a). $f \in \mathcal{L}(A) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ a.î. $\lambda(|f| \geq k) < \varepsilon$.

b). $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ a.î. $\lambda(|f_n| \geq k) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

c). $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f \Longrightarrow f_n^2 \xrightarrow[A]{\lambda} f^2$.

d). $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f, g_n \xrightarrow[A]{\lambda} g \Longrightarrow f_n g_n \xrightarrow[A]{\lambda} fg$.

Indicaţii.

a). Se va ţine cont că şirul de mulţimi măsurabile $(|f| \geq n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi că măsura spaţiului este finită.

b). Se va folosi incluziunea $(|f_n| \geq k+1) \subseteq (|f_n - f| \geq 1) \cup (|f| \geq k)$ şi punctul a).

c). Se va folosi incluziunea $(|f_n^2 - f^2| \geq \varepsilon) \subseteq (|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2k}) \cup (|f_n| \geq k) \cup (|f| \geq k)$ şi punctul b).

d). Se ţine cont de relaţia $f_n g_n = \frac{1}{4}[(f_n + g_n)^2 - (f_n - g_n)^2]$ şi de punctul precedent.

16). Să se arate că şirul $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$, definit prin $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, este convergent în măsură la funcţia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $f(x) = x$, însă $(f_n^2)_n$ nu converge în măsură la f^2. Să se explice rezultatul.

Capitolul 3

Integrala Lebesgue

În acest capitol vom construi integrala Lebesgue, întâi pentru funcţii măsurabile şi pozitive şi apoi pentru funcţii măsurabile în general.

Vom arăta că familia funcţiilor integrabile Lebesgue pe o mulţime $A \in \mathcal{L}$ se organizează ca un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{L}(A)$ şi că integrala este un operator liniar pe acest spaţiu.

Vom prezenta principalele proprietăţi ale clasei funcţiilor integrabile şi ale integralei; printre acestea se detaşează proprietăţile de trecere la limită sub integrală. În finalul capitolului vom face un studiu comparativ al integralelor Riemann şi Lebesgue.

3.1 Integrarea funcţiilor măsurabile pozitive

Fie $A \in \mathcal{L}$ şi fie $\mathcal{E}_+(A)$ mulţimea funcţiilor etajate şi pozitive pe A; dacă $f \in \mathcal{E}_+(A)$ atunci $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}$, unde $\{a_i : i = 1, ..., p\} \subseteq \mathbb{R}_+, a_i \neq a_j, \forall i \neq j$ iar $A_i = f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{L}, \forall i = 1, ..., p$. Presupunem că printre valorile lui f există şi valoarea 0 şi atunci $\{A_i : i = 1, ..., p\}$ formează o partiţie măsurabilă a mulţimii A.

3.1.1 Definiţie. Vom nota cu

$$\int_A f d\lambda = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i) \in [0, +\infty]$$

şi o vom numi **integrala** funcţiei f pe mulţimea A.

Funcţia f este **integrabilă** pe A dacă $\int_A f d\lambda < +\infty$.
Vom nota cu $\mathcal{E}_+^1(A)$ mulţimea funcţiilor etajate pozitive şi integrabile pe A.

Dacă $B \in \mathcal{L}, B \subseteq A$, atunci restricţia lui f la mulţimea B este $f|_B = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i \cap B} \in \mathcal{E}_+(A)$ (reamintim că identificăm $\chi_{A_i \cap B}$ cu restricţiile acestor funcţii caracteristice la mulţimea B) .

Evident, $\int_B f|_B d\lambda = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i \cap B) = \int_A f \cdot \chi_B d\lambda$; vom nota această integrală cu $\int_B f d\lambda$.

Dacă $B \in \mathcal{L}(A)$, atunci $\chi_B = \chi_B + 0 \cdot \chi_{A \setminus B} \in \mathcal{E}_+(A)$ şi $\int_A \chi_B d\lambda = \lambda(A \cap B) = \lambda(B)$. În particular, pentru orice $A \in \mathcal{L}, \chi_A \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R})$ şi $\int_{\mathbb{R}} \chi_A d\lambda = \lambda(A)$. Rezultă că $\chi_A \in \mathcal{E}_+^1(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $\lambda(A) < +\infty$.

3.1.2 Observaţie. Dacă $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}$, unde $\{A_i : i = 1, ..., p\}$ şi $\{B_j : j = 1, ..., q\}$ sunt partiţii măsurabile ale lui A, atunci

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i \lambda(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_j \lambda(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{q} b_j \lambda(B_j).$$

Egalitatea din mijloc are loc deoarece, $\forall (i, j)$ pentru care $A_i \cap B_j \neq \emptyset, a_i = b_j$.

Astfel integrala funcţiei f este bine definită.

3.1.3 Propoziţie. *Fie* $A \in \mathcal{L}, c \geq 0$ *şi* $f, g \in \mathcal{E}_+(A)$*; atunci*

1). $cf \in \mathcal{E}_+(A)$ *şi* $\int_A cf d\lambda = c \int_A f d\lambda$.
2). $f + g \in \mathcal{E}_+(A)$ *şi* $\int_A (f + g) d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda$.
3). $f \leq g \Longrightarrow \int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda$.
4). $\forall B, C \in \mathcal{L}, B \subseteq C \subseteq A \Longrightarrow \int_B f d\lambda \leq \int_C f d\lambda$.
5). $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall B \in \mathcal{L}, B \subseteq A, \lambda(B) < \delta, \int_B f d\lambda < \varepsilon$.

Demonstraţie. 1) este evidentă deoarece, dacă $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}$ atunci $cf = \sum_{i=1}^{p} c a_i \chi_{A_i}$.

2). Fie $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}, g = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}$, unde $\{A_i : i = 1, ..., p\}$ şi $\{B_j : j = 1, ..., q\}$ sunt partiţii măsurabile ale lui A; atunci

$$f + g = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i \chi_{A_i \cap B_j} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j};$$

rezultă că $f + g \in \mathcal{E}_+(A)$ iar

$$\int_A (f + g) d\lambda = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (a_i + b_j) \lambda(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \left(\sum_{j=1}^{q} \lambda(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{q} b_j \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda(A_i \cap B_j) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i) + \sum_{j=1}^{q} b_j \lambda(B_j) = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$

3). Fie $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}, g = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}$, unde $\{A_i : i = 1, ..., p\}$ şi $\{B_j : j = 1, ..., q\}$ sunt partiţii măsurabile ale lui A. Atunci din $f \leq g$ rezultă $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{A_i \cap B_j}$; observăm că, oricare ar fi perechea (i, j) pentru care $A_i \cap B_j \neq \emptyset, a_i \leq b_j$. Rezultă că

$$\int_A f d\lambda = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i \lambda(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_j \lambda(A_i \cap B_j) = \int_A g d\lambda.$$

4) rezultă din 3) dacă remarcăm că $f\chi_B \leq f\chi_C$ şi că $\int_B f d\lambda = \int_A f \cdot \chi_B d\lambda$ iar $\int_C f d\lambda = \int_A f \cdot \chi_C d\lambda$.

5). Fie $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}$; dacă $f = \underline{0}$, condiţia este evident verificată.

Dacă $f \neq \underline{0}$ fie $M = \max\{a_i : i = 1, ..., p\} > 0$. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ a.î. $\forall B \in \mathcal{L}, B \subseteq A$ cu $\lambda(B) < \delta, \int_B f d\lambda = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda(A_i \cap B) \leq M \cdot \sum_{i=1}^{p} \lambda(A_i \cap B) = M \cdot \lambda(B) < M \cdot \delta = \varepsilon$. ∎

Vom defini acum integrala pentru funcţiile măsurabile şi pozitive.

3.1.4 Definiţie. Fie $f \in \mathcal{L}_+(A)$; definim

$$\int_A f d\lambda = \sup \left\{ \int_A \varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}_+(A), \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty]$$

şi o numim **integrala** funcţiei f pe mulţimea A.

Funcţia f este **integrabilă** pe A dacă $\int_A f d\lambda < +\infty$.
Vom nota cu $\mathcal{L}_+^1(A)$ clasa funcţiilor măsurabile şi pozitive integrabile pe A.

Dacă $B \in \mathcal{L}, B \subseteq A, f\chi_B \in \mathcal{L}_+(A)$; definim atunci $\int_B f d\lambda = \int_A f\chi_B d\lambda$. Restricţia funcţiei f la B este măsurabilă şi pozitivă pe B ($f|_B \in \mathcal{L}_+(B)$ - vezi definiţia 2.1.1) şi $\int_B f|_B d\lambda = \int_B f d\lambda$. Dacă $f \in \mathcal{L}_+^1(A)$ atunci $f|_B \in \mathcal{L}_+^1(B)$.

3.1.5 Observaţie. Din teorema de aproximare a funcţiilor măsurabile şi pozitive (teorema 2.3.3), $\forall f \in \mathcal{L}_+(A), \exists (f_n) \subseteq \mathcal{E}_+(A)$ a.î. $f_n \uparrow f$. Aceasta justifică modul în care am definit integrala pentru funcţiile măsurabile şi pozitive.

Definiţia nu vine în contradicţie cu definiţia integralei pentru pentru funcţiile etajate şi pozitive. Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{E}_+(A)$ atunci $\int_A f d\lambda$

este cel mai mare element al mulţimii $\{\int_A \varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}_+(A), \varphi \leq f\}$ şi deci marginea ei superioară. În plus remarcăm că $\mathcal{E}^1_+(A) \subseteq \mathcal{L}^1_+(A)$.

În propoziţia următoare punem în evidenţă câteva proprietăţi imediate ale integralei funcţiilor măsurabile şi pozitive.

3.1.6 Propoziţie. *Fie $f, g \in \mathcal{L}_+(A)$ şi $c \geq 0$; atunci:*
1). $cf \in \mathcal{L}_+(A)$ *şi* $\int_A cf d\lambda = c\int_A f d\lambda$.
2). $f \leq g \Longrightarrow \int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda$.
3). $\forall B, C \in \mathcal{L}, B \subseteq C \subseteq A \Longrightarrow \int_B f d\lambda \leq \int_C f d\lambda$.

Demonstraţie. 1). Dacă $c = 0$ atunci $cf = \underline{0}$ şi deci $\int_A cf d\lambda = c\int_A f d\lambda$.
Dacă $c > 0$ atunci

$$\int_A cf d\lambda = \sup\left\{\int_A \varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}_+(A), \varphi \leq cf\right\} =$$

$$= \sup\left\{c\int_A \frac{1}{c}\varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}_+(A), \frac{1}{c}\varphi \leq f\right\} =$$

$$= \sup\left\{c\int_A \psi d\lambda : \psi \in \mathcal{E}_+(A), \psi \leq f\right\} = c\int_A f d\lambda.$$

2). Inegalitatea dintre integrale rezultă din incluziunea

$$\left\{\int_A \varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}_+(A), \varphi \leq f\right\} \subseteq \left\{\int_A \varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}_+(A), \varphi \leq g\right\}.$$

3). Observăm că $f\chi_B \leq f\chi_C$ şi aplicăm proprietatea de la 2). ■

Următoarea teoremă joacă un rol extrem de important în teoria integralei Lebesgue.

3.1.7 Teoremă (teorema convergenţei monotone).
Fie $A \in \mathcal{L}$, $f : A \to \mathbb{R}_+$ şi $(f_n) \subseteq \mathcal{L}_+(A)$ a.î. $f_n \leq f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $f_n \uparrow f$; atunci $f \in \mathcal{L}_+(A)$ şi $\int_A f_n d\lambda \uparrow \int_A f d\lambda$.

Demonstraţie. Evident $f \in \mathcal{L}_+(A)$ şi, deoarece $f_n \leq f, \forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A f_n d\lambda \leq \int_A f d\lambda$.

În plus, din proprietatea 2) a propoziţiei precedente, şirul $\left(\int_A f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător în $[0, +\infty]$ şi deci există $\lim_n \int_A f_n d\lambda \in [0, +\infty]$ şi

$$\lim_n \int_A f_n d\lambda \leq \int_A f d\lambda \tag{1}$$

Fie acum $t \in (0,1)$ arbitrar şi $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}_+(A), \varphi \leq f$, o funcţie oarecare dar, pentru moment, fixată. Definim, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, mulţimea $B_n = \{x \in A : f_n(x) \geq t\varphi(x)\} \in \mathcal{L}$. Atunci

$$B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ şi } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A. \tag{2}$$

Incluziunea $B_n \subseteq B_{n+1}$ este consecinţa faptului că şirul $(f_n)_n$ este crescător. Egalitatea se arată prin dublă incluziune; incluziunea $\subseteq$ are loc deoarece $B_n \subseteq A, \forall n \in \mathbb{N}$. Să demonstrăm incluziunea $\supseteq$. Oricare ar fi $x \in A$, dacă $\varphi(x) = 0$ atunci $x \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$, deoarece funcţiile f_n sunt pozitive. Dacă $\varphi(x) > 0$ atunci $t\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$; deoarece $f_n(x) \uparrow f(x)$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $t\varphi(x) < f_n(x)$ şi deci $x \in B_n$.

Acum, folosind proprietatea de continuitate a măsurii pe şiruri ascendente (vezi proprietatea 6) a teoremei 1.3.11) şi relaţiile (2), rezultă:

$$\int_A t\varphi d\lambda = \sum_{i=1}^{p} ta_i\lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{p} ta_i\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_i \cap B_n)\right) = \tag{3}$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{p} ta_i\lambda(A_i \cap B_n) = \lim_n \int_{B_n} t\varphi d\lambda \leq \lim_n \int_{B_n} f_n d\lambda \leq \lim_n \int_A f_n d\lambda.$$

Din relaţia (3) rezultă $\int_A \varphi d\lambda \leq \frac{1}{t} \cdot \lim_n \int_A f_n d\lambda$ şi cum funcţia $\varphi \leq f$ este arbitrară, $\int_A f d\lambda \leq \frac{1}{t} \cdot \lim_n \int_A f_n d\lambda$. Dacă în relaţia precedentă $t \to 1$ obţinem

$$\int_A f d\lambda \leq \lim_n \int_A f_n d\lambda. \tag{4}$$

Inegalităţile (1) şi (4) demonstrează teorema. ∎

3.1.8 Corolar. $\int_A (f+g)d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda, \forall f, g \in \mathcal{L}_+(A)$.

Demonstraţie. Fie $(f_n)_n, (g_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+(A)$ a.î. $f_n \uparrow f$ şi $g_n \uparrow g$ (vezi teorema 2.3.3); atunci $f_n + g_n \uparrow f + g$ şi, conform teoremei precedente şi a propoziţiei 3.1.3,

$$\int_A (f+g)d\lambda = \lim_n \int_A (f_n + g_n)d\lambda = \lim_n \int_A f_n d\lambda + \lim_n \int_A g_n d\lambda =$$

$$= \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$ ∎

3.1.9 Corolar (teorema lui Beppo Levi).
Fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}_+(A)$ *un şir cu proprietatea că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este convergentă punctual pe* A *şi* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$*; atunci* $f \in \mathcal{L}_+(A)$ *şi*

$$\int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\lambda.$$

Demonstraţie. Şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$, definit prin $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, este format din funcţii măsurabile şi $s_n \uparrow f$. Rezultă că $f \in \mathcal{L}_+(A)$ şi $\int_A s_n d\lambda \uparrow \int_A f d\lambda$.

Pe de altă parte, din corolarul precedent,

$$\int_A s_n d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k d\lambda,$$

de unde rezultă egalitatea $\int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\lambda$. ■

3.1.10 Corolar. *Fie* $f \in \mathcal{L}_+(A)$ *şi fie* $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A)$ *un şir de mulţimi disjuncte două câte două; atunci*

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

Demonstraţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $f_n = f \cdot \chi_{A_n} \subseteq \mathcal{L}_+(A)$; deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \cdot \chi_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} \leq f$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punctual pe A.

Suntem în ipotezele corolarului precedent şi deci obţinem:

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\lambda = \int_A f \cdot \chi_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} d\lambda = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda. \quad ■$$

3.1.11 Corolar (lema lui Fatou). *Fie* $(f_n) \subseteq \mathcal{L}_+(A)$ *a.î.* $f = \liminf_n f_n < +\infty$*; atunci:*

$$\int_A \liminf_n f_n d\lambda \leq \liminf_n \int_A f_n d\lambda.$$

Demonstraţie. Vom aminti că $\liminf_n f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k$. Dacă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, notăm $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ atunci şirul $(g_n)_n \subseteq \mathcal{L}_+(A)$ este crescător şi $f = \liminf_n f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \lim_n g_n$. Atunci $f \in \mathcal{L}_+(A)$ şi din teorema convergenţei monotone (teorema 3.1.7), $\int_A g_n d\lambda \uparrow \int_A f d\lambda$.

Pe de altă parte, deoarece $g_n \leq f_n, \int_A g_n d\lambda \leq \int_A f_n d\lambda, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde $\lim_n \int_A g_n d\lambda = \liminf_n \int_A g_n d\lambda \leq \liminf_n \int_A f_n d\lambda$. Deci $\int_A f d\lambda \leq \liminf_n \int_A f_n d\lambda$.
■

3.1.12 Propoziţie. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f \in \mathcal{L}_+(A)$; atunci*

$$\int_A f d\lambda = 0 \Longleftrightarrow f = \underline{0} \text{ a.p.t.}$$

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Presupunem că $\int_A f d\lambda = 0$ şi fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = (f \geq \frac{1}{n}) \in \mathcal{L}$. Atunci $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = = (f > 0)$, de unde $\lambda(f \neq 0) = \lambda(f > 0) = \lim_n \lambda(A_n)$.

Pe de altă parte, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{A_n} f d\lambda \leq \int_A f d\lambda = 0$ de unde rezultă că $\int_{A_n} f d\lambda = 0$ şi cum $\int_{A_n} f d\lambda \geq \frac{1}{n}\lambda(A_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda(A_n) = 0$.

Rezultă că $\lambda(f \neq 0) = 0$ şi deci $f = \underline{0}$ a.p.t.

($\Longleftarrow$): Dacă $f = \underline{0}$ a.p.t. atunci, oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{E}_+(A)$ cu $\varphi \leq f, \varphi = \underline{0}$ a.p.t. Dacă $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}$ atunci, pentru orice i pentru care $\lambda(A_i) \neq 0, a_i = 0$ şi deci $\int_A \varphi d\lambda = 0$. Deoarece funcţia φ este arbitrară, $\int_A f d\lambda = 0$.

∎

3.1.13 Corolar. *Fie $A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{L}(A)$ cu $\lambda(B) = 0$ şi $f \in \mathcal{L}_+(A)$; atunci $\int_B f d\lambda = 0$.*

Demonstraţie. Observăm că $\int_B f d\lambda = \int_A f \chi_B d\lambda$ şi că $f\chi_B = \underline{0}$ a.p.t.

3.1.14 Observaţie. Funcţia lui Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ este nulă a.p.t. pe $\mathbb{R}$. Rezultă din propoziţia 3.1.12 că această funcţie este integrabilă şi că integrala ei este 0. Din punctul 3) al propoziţiei 3.1.6 această funcţie este integrabilă pe orice mulţime măsurabilă şi are integrala 0.

Remarcăm că funcţia lui Dirichlet nu este integrabilă Riemann pe niciun interval închis (nu este continuă a.p.t. - vezi teorema 2.1.7).

3.1.15 Teoremă. *Fie $f \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi fie $\mathcal{L}(A)$ σ-algebra submulţimilor măsurabile ale lui A (vezi definiţia 1.3.1); definim aplicaţia $\mu : \mathcal{L}(A) \to \mathbb{R}_+$ prin $\mu(B) = \int_B f d\lambda, \forall B \in \mathcal{L}(A)$.*

Atunci μ este o măsură finită pe $\mathcal{L}(A)$ care verifică următoarele două condiţii:

1). $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall B \in \mathcal{L}(A)$ *cu* $\lambda(B) < \delta, \mu(B) = \int_B f d\lambda < \varepsilon$.

2). $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \in \mathcal{L}(A)$ *cu* $\lambda(A_0) < +\infty$ *a.î.*
$\mu(A \setminus A_0) = \int_{A \setminus A_0} f d\lambda < \varepsilon$.

Demonstraţie. $\mathcal{L}(A) = \{B \in \mathcal{L} : B \subseteq A\}$ este o σ-algebră pe A. Vom arăta că μ verifică condiţiile din definiţia 1.4.5.

$\mu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\lambda = 0$ căci $\lambda(\emptyset) = 0$.

Fie $(B_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A)$, $B_n \cap B_m = \emptyset, \forall n \neq m$, şi fie $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}(A)$; atunci, aplicând teorema lui Beppo Levi (vezi corolarul 3.1.10),

$$\mu(B) = \int_B f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Deci μ este o măsură pe A şi, cum $\mu(A) = \int_A f d\lambda < +\infty$, μ este o măsură finită.

Rezultă că μ verifică toate proprietăţile 1)-9) din teorema 1.4.7.

1). Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $A_n = (f > n) \in \mathcal{L}(A)$; atunci $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = (f = +\infty) = \emptyset$. Din proprietatea 7) a teoremei 1.4.7, $0 = \mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$ şi astfel $\lim_n \int_{(f>n)} f d\lambda = 0$.

Acum, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\mu(A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$; fie $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_0} > 0$.

Oricare ar fi $B \in \mathcal{L}(A)$ cu $\lambda(B) < \delta$,

$$\mu(B) = \int_B f d\lambda = \mu(B \cap A_{n_0}) + \mu(B \setminus A_{n_0}) \leq \mu(A_{n_0}) + \int_{B \cap (f \leq n_0)} f d\lambda <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \cdot \lambda(B) < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2n_0} = \varepsilon.$$

2). Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fie $A_n = A \cap [-n, n] \in \mathcal{L}(A)$; atunci $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Atunci $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$ de unde $\mu(A \setminus A_n) \to 0$ (deoarece $\mu(A_n) < +\infty$, am folosit substractivitatea măsurii μ - proprietatea 3) a teoremei 1.4.7).

Atunci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\mu(A \setminus A_{n_0}) < \varepsilon$.

Fie $A_0 = A_{n_0}$; $\lambda(A_0) \leq 2n_0 < +\infty$ şi $\int_{A \setminus A_0} f d\lambda = \mu(A \setminus A_0) < \varepsilon$. ■

3.1.16 Observaţii. (i) Proprietatea 1) se va numi proprietatea de **absolută continuitate** a integralei.

(ii) Proprietatea 2) arată că, pentru o funcţie integrabilă, integrala depinde de comportarea acestei funcţii pe mulţimi de măsură finită.

3.2 Funcţii integrabile. Integrala Lebesgue

Fie $f : A \to \mathbb{R}$; am definit $f^+ = \sup\{f, \underline{0}\}$ şi $f^- = \sup\{-f, \underline{0}\}$ şi am arătat că $f = f^+ - f^-$ iar $|f| = f^+ + f^-$ (vezi definiţia 2.1.13). În propoziţia 2.1.14 am arătat că, dacă $A \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}(A) \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}_+(A)$.

3.2.1 Definiţie. Fie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci

(i) f **admite integrală** pe A dacă $\int_A f^+ d\lambda < +\infty$ **sau** $\int_A f^- d\lambda < +\infty$ şi, în acest caz,

$$\int_A f d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda.$$

Când este necesar să precizăm variabila după care se face integrarea vom mai nota şi $\int_A f(x) d\lambda(x)$.

(ii) f este **integrabilă** pe A dacă $\int_A f^+ d\lambda < +\infty$ **şi** $\int_A f^- d\lambda < +\infty$.

Dacă nu este pericol de confuzie (aşa cum va fi cazul când vom discuta şi despre integrala sau integrabilitatea Riemann), vom spune pur şi simplu că f are integrală pe A respectiv că f este integrabilă pe A.

Vom nota cu $\mathcal{L}^1(A)$ clasa funcţiilor integrabile pe A; din definiţie, $f \in \mathcal{L}^1(A) \iff f^+, f^- \in \mathcal{L}^1_+(A)$. Evident $\mathcal{E}^1_+(A) \subseteq \mathcal{L}^1_+(A) \subseteq \mathcal{L}^1(A)$.

Dacă $B \in \mathcal{L}(A)$ atunci spunem că f este integrabilă pe B (respectiv că f are integrală pe B) dacă $f \cdot \chi_B$ este integrabilă pe A (are integrală pe A) şi notăm $\int_B f d\lambda = \int_A f \chi_B d\lambda$.

Vom nota cu $\mathcal{L}^1(B)$ mulţimea funcţiilor integrabile pe B.

3.2.2 Teoremă. *Fie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci $f \in \mathcal{L}^1(A) \iff |f| \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi, în acest caz,*

$$\left|\int_A f d\lambda\right| \leq \int_A |f| d\lambda.$$

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Dacă presupunem că f este integrabilă pe A atunci $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi, din corolarul 3.1.8, $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1_+(A)$.

($\Longleftarrow$): Fie $|f| \in \mathcal{L}^1_+(A)$; deoarece $f^+, f^- \leq |f|$, $\int_A f^+ d\lambda \leq \int_A |f| d\lambda < +\infty$ şi $\int_A f^- d\lambda \leq \int_A |f| d\lambda < +\infty$ (vezi punctul 2) al propoziţiei 3.1.6). Rezultă că $f \in \mathcal{L}^1(A)$. În plus, folosind corolarul 3.1.8,

$$\left|\int_A f d\lambda\right| = \left|\int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda\right| \leq \int_A f^+ d\lambda + \int_A f^- d\lambda = \int_A |f| d\lambda. \quad \blacksquare$$

Observăm că, la integrala Lebesgue, nu întâlnim semi-convergenţa: integrabilitatea funcţiei este echivalentă cu integrabilitatea modulului ei. Deoarece modulul unei funcţii măsurabile este o funcţie măsurabilă şi pozitivă putem obţine o condiţie simplă de integrabiliate.

3.2.3 Corolar. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$.*

1). Dacă $f = \underline{0}$ a.p.t. pe A, atunci $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $\int_A f d\lambda = 0$.

2). Dacă $\lambda(A) = 0$, atunci $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $\int_A f d\lambda = 0$.

Demonstraţie. 1). Deoarece funcţia constantă $\underline{0}$ este continuă pe A ea este măsurabilă şi, datorită punctului 1) din teorema 2.1.6, rezultă că şi f este măsurabilă. Atunci $|f| \in \mathcal{L}_+(A)$; din propoziţia 3.1.12, $\int_A |f| d\lambda = 0$ ($|f| = \underline{0}$ a.p.t.). Rezultă că $|f| \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi, din teorema 3.2.2, $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Inegalitatea din aceeaşi teoremă 3.2.2 arată că $\int_A f d\lambda = 0$.

2). Dacă $\lambda(A) = 0$ atunci $f = \underline{0}$ a.p.t. pe A şi putem aplica punctul 1).

■

3.2.4 Observaţie. Remarcăm că, pentru funcţii de semn oarecare, nu are loc decât o implicaţie din echivalenţa din propoziţia 3.1.12 : dacă $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $\int_A f d\lambda = 0$ nu rezultă că $f = \underline{0}$ a.p.t.

Într-adevăr, fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0), \\ 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$
Atunci $f^- = \chi_{[-1,0)}, f^+ = \chi_{[0,1]}$ şi deci $\int_{[-1,1]} f^+ d\lambda = 1 = \int_{[0,1]} f^- d\lambda$.

Rezultă că $\int_{[-1,1]} f d\lambda = 0$ dar f nu ia valoarea 0 în nici-un punct.

În condiţii mai tari putem totuşi formula o reciprocă: dacă integrala unei funcţii f este nulă pe toate submulţimile măsurabile ale lui A, atunci funcţia f este nulă a.p.t. pe A.

3.2.5 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f \in \mathcal{L}^1(A)$.*

a). Dacă $\int_B f d\lambda \geq 0$, oricare ar fi $B \in \mathcal{L}(A)$, atunci $f \geq \underline{0}$ a.p.t. pe A.

b). Dacă $\int_B f d\lambda \leq 0$, oricare ar fi $B \in \mathcal{L}(A)$, atunci $f \leq \underline{0}$ a.p.t. pe A.

c). Dacă $\int_B f d\lambda = 0$, oricare ar fi $B \in \mathcal{L}(A)$, atunci $f = \underline{0}$ a.p.t. pe A.

Demonstraţie. a). Fie $(f < 0) = \{x \in A : f(x) < 0\}$; atunci $(f < 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(f \leq -\dfrac{1}{n}\right)$. Şirul format de mulţimile $\left(f \leq -\dfrac{1}{n}\right)$ este crescător şi deci, conform teoremei 1.3.11),

$$(*) \qquad \lambda(f < 0) = \lim_n \lambda \left(f \leq -\frac{1}{n}\right).$$

Pe de altă parte, din ipoteză, $\int_{(f \leq -\frac{1}{n})} f d\lambda \geq 0$ şi deci

$$0 \leq \int_{(f \leq -\frac{1}{n})} f d\lambda \leq -\frac{1}{n} \cdot \lambda \left(f \leq -\frac{1}{n}\right),$$

de unde $\lambda \left(f \leq -\dfrac{1}{n}\right) \leq 0$ şi deci $\lambda \left(f \leq -\dfrac{1}{n}\right) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Din relaţia $(*)$ rezultă că $\lambda(f < 0) = 0$ şi deci $f \geq 0$ a.p.t. pe A.
b) se demonstrează la fel cu a) şi c) este o consecinţă a punctelor a) şi b). ■

3.2.6 Teoremă (teorema de dominare). *Fie* $f \in \mathcal{L}(A)$ *şi* $g \in \mathcal{L}^1_+(A)$ *a.î.* $|f| \leq g$*; atunci* $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

Demonstraţie. $|f| \in \mathcal{L}_+(A)$ şi, din punctul 2) al propoziţiei 3.1.6, $\int_A |f| d\lambda \leq \int_A g d\lambda < +\infty$. Rezultă că $|f| \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi atunci teorema precedentă ne asigură că $f \in \mathcal{L}^1(A)$. ∎

Teorema de dominare are mai multe consecinţe.

3.2.7 Corolar. *Fie* $A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{L}(A)$ *şi* $f \in \mathcal{L}(A)$*; dacă* $f \in \mathcal{L}^1(A)$ *atunci* $f \in \mathcal{L}^1(B)$.

Demonstraţie. $|f \cdot \chi_B| \leq |f|$ şi, deoarece $f \in \mathcal{L}^1(A)$, teorema de dominare ne asigură că $f \cdot \chi_B \in \mathcal{L}^1(A)$ ceea ce este echivalent cu $f \in \mathcal{L}^1(B)$.

3.2.8 Corolar. *O funcţie măsurabilă şi mărginită pe o mulţime de măsură finită este integrabilă.*

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(A) < +\infty$ şi $f \in \mathcal{L}(A)$ o funcţie mărginită; există deci $k > 0$ a.î. $|f(x)| \leq k, \forall x \in A$.

Funcţia constantă $\underline{k} \in \mathcal{E}_+(A)$ are integrala $\int_A \underline{k} d\lambda = k \cdot \lambda(A) < +\infty$. Deci $\underline{k} \in \mathcal{E}^1_+(A) \subseteq \mathcal{L}^1_+(A)$. Teorema de dominare ne asigură atunci că $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

3.2.9 Corolar. *Orice funcţie integrabilă Riemann pe un interval închis şi mărginit* $[a, b]$ *este integrabilă Lebesgue pe* $[a, b]$*:* $\mathcal{R}_{[a,b]} \subsetneq \mathcal{L}^1([a, b])$.

Demonstraţie. Orice funcţie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este mărginită şi măsurabilă (corolarul 2.1.8) deci, conform corolarului precedent, este integrabilă Lebesgue.

Am remarcat în 3.1.14 că funcţia lui Dirichlet este integrabilă Lebesgue pe orice interval închis $[a, b]$ dar nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Deci incluziunea din corolarul precedent este strictă.

Aşa cum vom arăta mai departe în teorema 3.3.10, $\mathcal{R}_{[a,b]}$ este subspaţiu dens în $\mathcal{L}^1([a, b])$.

3.2.10 Teoremă. *Fie* $A \in \mathcal{L}$*;* $\mathcal{L}^1(A)$ *se organizează ca un spaţiu vectorial real iar aplicaţia* $I : \mathcal{L}^1(A) \to \mathbb{R}, I(f) = \int_A f d\lambda$*, este liniară:*

1). $\int_A (f + g) d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda, \forall f, g \in \mathcal{L}^1(A)$;

2). $\int_A cf d\lambda = c \int_A f d\lambda, \forall f \in \mathcal{L}^1(A), \forall c \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Pentru a arăta că $\mathcal{L}^1(A)$ este spaţiu vectorial este suficient să arătăm că este închis la operaţiile de adunare şi de înmulţire cu scalari reali ($\mathcal{L}^1(A)$ este submulţime a spaţiului vectorial al tuturor funcţiilor reale definite pe mulţimea A).

Fie deci $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$; atunci teorema 3.2.2 ne asigură că $|f|, |g| \in \mathcal{L}^1_+(A)$ iar corolarul 3.1.8 ne spune că $h = |f| + |g| \in \mathcal{L}^1_+(A)$ ($\int_A h d\lambda = \int_A |f| d\lambda + \int_A |g| d\lambda < +\infty$).

Pe de altă parte $|f+g| \leq |f| + |g| = h$ şi atunci teorema de dominare asigură integrabilitatea lui $f+g$. Din relaţia

$$(f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

obţinem

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Integrând egalitatea precedentă (se observă că toate funcţiile care intervin sunt integrabile şi pozitive) şi folosind din nou corolarul 3.1.8, obţinem

$$\int_A (f+g)^+ d\lambda + \int_A f^- d\lambda + \int_A g^- d\lambda = \int_A (f+g)^- d\lambda + \int_A f^+ d\lambda + \int_A g^+ d\lambda$$

de unde, toţi termenii fiind finiţi, obţinem

$$\int_A (f+g) d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$

Fie acum $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $c \in \mathbb{R}$; atunci $|c \cdot f| = |c| \cdot |f| \in \mathcal{L}^1_+(A)$ de unde $c \cdot f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi

$$\int_A (c \cdot f) d\lambda = \int_A (c \cdot f)^+ d\lambda - \int_A (c \cdot f)^- d\lambda.$$

Dacă $c > 0$ atunci $(c \cdot f)^+ = c \cdot f^+$ şi $(c \cdot f)^- = c \cdot f^-$ de unde, folosind punctul 1) al propoziţiei 3.1.6, obţinem

$$\int_A (c \cdot f) d\lambda = c \int_A f^+ d\lambda - c \int_A f^- d\lambda = c \int_A f d\lambda.$$

Dacă $c < 0$ atunci demonstraţia se face la fel observând că $(c \cdot f)^+ = -c \cdot f^-$ şi $(c \cdot f)^- = -c \cdot f^+$. ■

3.2.11 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}, \lambda(A) > 0$ şi fie $f, g \in \mathcal{L}(A), f = g$, a.p.t. Dacă f admite integrală atunci şi g admite integrală şi $\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda$.*

$f \in \mathcal{L}^1(A) \Longleftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(A)$.

Demonstraţie. Deoarece f admite integrală pe A, $\int_A f^+ d\lambda < +\infty$ **sau** $\int_A f^- d\lambda < +\infty$. Să presupunem că $\int_A f^+ d\lambda < +\infty$; atunci, deoarece $f^+ - g^+ = \underline{0}$ a.p.t., $f^+ - g^+ \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $\int_A (f^+ - g^+) d\lambda = 0$ (vezi corolarul 3.2.3). Rezultă că $\int_A g^+ d\lambda = \int_A f^+ d\lambda < +\infty$; deci g are integrală.

Dacă $\int_A f^- d\lambda < +\infty$ rezultă similar că $\int_A g^- d\lambda = \int_A f^- d\lambda$.

Este atunci evident că

$$\int_A f d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda = \int_A g^+ d\lambda - \int_A g^- d\lambda = \int_A g d\lambda. \qquad \blacksquare$$

3.3 Proprietăţi ale integralei Lebesgue

3.3.1 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$; atunci*

1). $f \le g \Longrightarrow \int_A f d\lambda \le \int_A g d\lambda$;

2). $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall B \in \mathcal{L}(A)$ *cu* $\lambda(B) < \delta, \int_B |f| d\lambda < \varepsilon$;

3). $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \in \mathcal{L}(A)$ *cu* $\lambda(A_0) < +\infty$ *a.î.* $\int_{A \setminus A_0} |f| d\lambda < \varepsilon$;

4). $\displaystyle\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda, (A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A), A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m.$

Demonstraţie.

1). Dacă $f \le g$ atunci $g - f \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi deci $\int_A (g - f) d\lambda \ge 0$. Pe de altă parte, din teorema 3.2.10, $\int_A (g - f) d\lambda = \int_A g d\lambda - \int_A f d\lambda$ de unde rezultă inegalitatea cerută.

2) şi 3) sunt consecinţe imediate ale teoremei 3.1.15.

4). Se aplică corolarul 3.1.10 funcţiilor măsurabile şi pozitive f^+ şi f^-. $\blacksquare$

3.3.2 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $\| \cdot \|_1 : \mathcal{L}^1(A) \to \mathbb{R}_+$ definită prin* $\|f\|_1 = \int_A |f| d\lambda, \forall f \in \mathcal{L}^1(A)$*; atunci*

1). $\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = \underline{0}$ *a.p.t.*

2). $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1, \forall f \in \mathcal{L}^1(A), \forall c \in \mathbb{R}$

3). $\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1, \forall f, g \in \mathcal{L}^1(A)$.

Demonstraţie. 1). $\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \int_A |f| d\lambda = 0 \Longleftrightarrow |f| = \underline{0}$ a.p.t. (vezi propoziţia 3.1.12) $\Longleftrightarrow f = \underline{0}$ a.p.t.

2) este consecinţa punctului 1) din propoziţia 3.1.6.

3). Folosind punctul 2) al aceleiaşi propoziţii 3.1.6 şi corolarul 3.1.8 obţinem:

$$\|f + g\|_1 = \int_A |f + g| d\lambda \le \int_A |f| d\lambda + \int_A |g| d\lambda = \|f\|_1 + \|g\|_1. \qquad \blacksquare$$

3.3.3 Observaţie. Rezultă din teorema precedentă că $\|\cdot\|_1$ este o seminormă pe spaţiul vectorial $\mathcal{L}^1(A)$. $\|\cdot\|_1$ nu este o normă pe $\mathcal{L}^1(A)$ deoarece există funcţii pozitive care au integrala 0 şi care nu sunt nule peste tot (vezi observaţia 3.1.14.

Relaţia $\doteq$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{L}^1(A)$ (este reflexivă simetrică şi tranzitivă). Să notăm cu $L^1(A)$ spaţiul cât $\mathcal{L}^1(A)|_{\doteq}$; $L^1(A) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^1(A)\}$, unde am notat $[f] = \{g \in \mathcal{L}^1(A) : f \doteq g\}$. Ţinând cont că integrala Lebesgue este aceeaşi pentru două funcţii egale între ele a.p.t. (vezi teorema 3.2.11), putem defini consistent $\|[f]\|_1 = \|f\|_1, \forall [f] \in L^1(A)$. Aplicaţia astfel definită este o normă pe $L^1(A)$.

3.3.4 Definiţie. Seminorma $\|\cdot\|_1$ se va numi **seminorma convergenţei în medie de ordin 1** (sau pur şi simplu seminorma convergenţei în medie) pe $\mathcal{L}^1(A)$.

Un şir $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ este **convergent în medie** la $f \in \mathcal{L}^1(A)$ dacă $\|f_n - f\|_1 \to 0$ ($\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_1 < \varepsilon$).

Vom nota această situaţie cu $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_1} f$.

Un şir $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ este şir **Cauchy în medie** dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î., $\forall m, n \geq n_0, \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$.

Dacă $F \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ atunci $f \in \mathcal{L}^1(A)$ este un **punct aderent în medie** pentru F dacă există $(f_n) \subseteq F$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_1} f$; vom nota aceasta cu $f \in \overline{F}^1$.

3.3.5 Teoremă. *Fie* $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ *şi* $f \in \mathcal{L}^1(A)$;

1). $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_1} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.
2). $(f_n)_n$ *Cauchy în medie* $\Longrightarrow (f_n)_n$ *Cauchy în măsură.*

Demonstraţie. 1). Presupunem că $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ este convergent în medie la $f \in \mathcal{L}^1(A)$; pentru orice $\varepsilon > 0, \|f_n - f\|_1 = \int_A |f_n - f| d\lambda \geq \int_{(|f_n - f| \geq \varepsilon)} |f_n - f| d\lambda \geq \varepsilon \cdot \lambda(|f_n - f| \geq \varepsilon)$ de unde $\lambda(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f_n - f\|_1$ şi deci $\lim_n \lambda(|f_n - f| \geq \varepsilon) = 0$. ε fiind arbitrar, $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

2). În mod asemănător observăm că, pentru orice $\varepsilon > 0, \|f_n - f_m\|_1 = \int_A |f_n - f_m| d\lambda \geq \int_{(|f_n - f_m| \geq \varepsilon)} |f_n - f_m| d\lambda \geq \varepsilon \cdot \lambda(|f_n - f_m| \geq \varepsilon)$ de unde $\lambda(|f_n - f_m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f_n - f_m\|_1$. Dacă $(f_n)_n$ este Cauchy în medie atunci $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$ şi deci $\lim_{n,m} \lambda(|f_n - f_m| \geq \varepsilon) = 0$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$.
∎

3.3.6 Observaţie. Reciproca teoremei precedente nu este adevărată. De exemplu şirul $(f_n)_n$ definit prin $f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \in \mathcal{L}^1([0,1])$ este convergent în măsură la $\underline{0}$ (de ce ?) dar nu este convergent în medie (de ce ?).

Următorul rezultat prezintă o condiţie foarte convenabilă de trecere la limită sub integrala Lebesgue.

3.3.7 Teoremă (teorema convergenţei dominate).

Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{L}(A)$ *şi* $g \in \mathcal{L}^1(A)$ *a.î.*

1). $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ *şi*

2). $|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(A), f \in \mathcal{L}^1(A),\ f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_1} f$ *şi* $\int_A f_n d\lambda \to \int_A f d\lambda$.

Demonstraţie. Din teorema de dominare (vezi teorema 3.2.6) rezultă că $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ iar punctul 3) al teoremei 2.1.6 ne asigură că $f \in \mathcal{L}(A)$. Dacă trecem la limită în inegalitatea 2) obţinem $|f| \leq g$; teorema de dominare ne conduce la $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

Să observăm acum că $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$; rezultă că, dacă notăm $h_n = 2g - |f_n - f|$, $(h_n)_n \subseteq \mathcal{L}_+(A)$. Aplicăm atunci şirului $(h_n)_n$ lema lui Fatou (vezi corolarul 3.1.11):

$$\int_A \liminf_n h_n d\lambda \leq \liminf_n \int_A h_n d\lambda.$$

Ţinând cont că $\liminf_n h_n = 2g$ a.p.t., obţinem

$$2\int_A g d\lambda \leq 2\int_A g d\lambda + \liminf_n \left(-\int_A |f_n - f| d\lambda \right) =$$

$$= 2\int_A g d\lambda - \limsup_n \int_A |f_n - f| d\lambda$$

de unde $\limsup_n \|f_n - f\|_1 \leq 0$. Rezultă că $\limsup_n \|f_n - f\|_1 = 0$; deci există $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

Deoarece $\left| \int_A f_n d\lambda - \int_A f d\lambda \right| \leq \int_A |f_n - f| d\lambda = \|f_n - f\|_1$ rezultă că $\int_A f_n d\lambda \to \int_A f d\lambda$. ■

3.3.8 Observaţie. În teorema convergenţei dominate putem relaxa condiţia a doua, cerând ca, $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$, a.p.t pe A.

Într-adevăr, dacă notăm cu $A_n = (|f_n| > g)$, atunci $\lambda(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi deci mulţimea $A_0 = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ este neglijabilă. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}$, funcţia $g_n = f_n \cdot \chi_{A \setminus A_0}$ este egală a.p.t cu f_n. Rezultă că $g_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ şi în plus, $\forall n \in \mathbb{N}, |g_n| \leq g$ şi $\int_A |f_n - f| d\lambda = \int_A |g_n - f| d\lambda$.

3.3.9 Corolar (teorema convergenţei mărginite).

Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{L}(A)$, $\lambda(A) < +\infty$ *şi* $c \in \mathbb{R}_+$ *a.î.*

1). $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$ *şi*

2). $|f_n| \leq \underline{c}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(A), f \in \mathcal{L}^1(A)$ *şi* $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_1} f$ $\int_A f_n d\lambda \to \int_A f d\lambda$.

Demonstraţie. Teorema rezultă din teorema convergenţei dominate dacă observăm că, pe mulţimi de măsură finită, funcţiile constante sunt integrabile; putem atunci lua $g = \underline{c}$.

În cele ce urmează vom pune în evidenţă două submulţimi dense în $\mathcal{L}^1(A)$.

3.3.10 Teoremă. *Fie* $\mathcal{E}^1(A) = \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{L}^1(A)$ *- mulţimea funcţiilor etajate şi integrabile şi* $C^1(A) = C(A) \cap \mathcal{L}^1(A)$ *- mulţimea funcţiilor continue şi integrabile pe* A*; atunci*

1). $\overline{\mathcal{E}^1(A)}^1 = \mathcal{L}^1(A)$ *şi*

2). $\overline{C_1(A)}^1 = \mathcal{L}^1(A)$.

Demonstraţie. Din definiţie $\overline{\mathcal{E}^1(A)}^1 \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ şi $\overline{C_1(A)}^1 \subseteq \mathcal{L}^1(A)$. Trebuie să demonstrăm incluziunile inverse.

1). Oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^1(A), f = f^+ - f^-$ iar $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1_+(A)$. Ţinând cont de punctul 1) din teorema de aproximare a funcţiilor măsurabile (vezi teorema 2.3.3), există două şiruri $(g_n)_n, (h_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+(A)$ a.î. $g_n \uparrow f^+$ şi $h_n \uparrow f^-$. Atunci $f_n = g_n - h_n \to f$ şi $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(A)$.

Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g_n + h_n \leq f^+ + f^- = |f| \in \mathcal{L}^1_+(A)$. Din teorema convergenţei dominate (teorema 3.3.7), $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ şi deci $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{L}^1(A) = \mathcal{E}^1(A)$ şi, în plus, $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Rezultă că $f \in \overline{\mathcal{E}^1(A)}^1$.

2). Vom arăta întâi că $\mathcal{E}^1(A) \subseteq \overline{C_1(A)}^1$.

Oricare ar fi $f = \sum_{i=1}^p a_i \cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^1(A)$ fie $M = \sup_{x \in A} |f(x)| =$
$= \max\{|a_1|, \cdots, |a_p|\}$. Din teorema lui Borel (vezi teorema 2.3.9 şi corolarul 2.3.10), oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $f_\varepsilon \in C(A)$ a.î. $\lambda(f \neq f_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M}$ şi, în plus, $\sup_{x \in A} |f_\varepsilon(x)| \leq M$. Fie $B = (f \neq f_\varepsilon) \in \mathcal{L}(A)$. Atunci $f_\varepsilon = f_\varepsilon \cdot \chi_B + f_\varepsilon \cdot$

$\chi_{A\setminus B} = f_\varepsilon \cdot \chi_B + f \cdot \chi_{A\setminus B}$ şi deci $|f_\varepsilon| \le M \cdot \chi_B + |f| \in \mathcal{E}^1_+(A) \subseteq \mathcal{L}^1(A)$. Din teorema de dominare rezultă că $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(A)$ şi deci $f_\varepsilon \in C_1(A)$. În plus

$$\|f-f_\varepsilon\|_1 = \int_A |f-f_\varepsilon| d\lambda = \int_B |f-f_\varepsilon| d\lambda \le \int_B (|f|+|f_\varepsilon|) d\lambda \le 2M\cdot\lambda(B) < \varepsilon.$$

Dacă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$, vom găsi un şir $(f_n)_n \subseteq C_1(A)$ a.î. $\|f - f_n\|_1 < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_1} f$ şi deci $f \in \overline{C_1(A)}^1$ ceea ce demonstrează incluziunea $\mathcal{E}^1(A) \subseteq \overline{C_1(A)}^1$.

Dacă în ultima incluziune folosim punctul 1) şi proprietăţile de monotonie şi de idempotenţă ale operatorului de aderenţă obţinem

$$\mathcal{L}^1(A) = \overline{\mathcal{E}^1(A)}^1 \subseteq \overline{\overline{C_1(A)}^1}^1 = \overline{C_1(A)}^1 \subseteq \mathcal{L}^1(A)$$

de unde obţinem a doua proprietate de densitate. ∎

3.3.11 Observaţii. (i) Dacă $\lambda(A) < +\infty$ atunci $\mathcal{E}^1(A) = \mathcal{E}(A)$ (vezi şi exerciţiul 14) de la 3.7. Deci în acest caz $\mathcal{E}(A)$ este dens în $\mathcal{L}^1(A)$.

(ii) Dacă A este compactă atunci $C_1(A) = C(A)$. Într-adevăr, în acest caz orice funcţie f continuă pe A este mărginită conform teoremei lui Weierstrass; deci există $M > 0$ a.î. $|f| \le \underline{M}$. Mulţimile compacte sunt mărginite deci au măsură finită. Pe mulţimile de măsură finită orice funcţie constantă este integrabilă şi deci $\underline{M} \in \mathcal{L}^1_+(A)$. Teorema de dominare ne asigură atunci că $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

Rezultă că în acest caz $C(A)$ este dens în $\mathcal{L}^1(A)$.

(iii) $\overline{\mathcal{R}_{[a,b]}}^1 = \mathcal{L}^1([a,b])$. Într-adevăr, în acest caz $C([a,b]) \subseteq \mathcal{R}_{[a,b]}$ şi, cum $[a,b]$ este compact, din observaţia precedentă,

$$\mathcal{L}^1([a,b]) = \overline{C([a,b])}^1 \subseteq \overline{\mathcal{R}_{[a,b]}}^1 \subseteq \mathcal{L}^1([a,b].$$

3.3.12 Teoremă. *Spaţiul seminormat $(\mathcal{L}^1(A), \|\cdot\|_1)$ este complet (orice şir Cauchy în medie este convergent în medie).*

Demonstraţie. Din teorema 3.3.5, 2), rezultă că orice şir $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(A)$ Cauchy în medie este Cauchy în măsură. Punctul 1) al teoremei lui Riesz (teorema 2.2.5) pune în evidenţă un subşir $(f_{k_n})_n$ al şirului $(f_n)_n$ convergent aproape uniform la o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$. Teorema 2.2.2, 2), afirmă că $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\cdot} f$ şi atunci $f \in \mathcal{L}(A)$ (punctul 3) din teorema 2.1.6).

Fixăm $m \in \mathbb{N}$; oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ fie $g_n = |f_m - f_{k_n}| \in \mathcal{L}_+(A)$. Aplicăm şirului $(g_n)_n$ lema lui Fatou (vezi corolarul 3.1.11):

$$\int_A \liminf_n g_n d\lambda \leq \liminf_n \int_A g_n d\lambda.$$

Deoarece $\liminf_n g_n = |f_m - f|$ a.p.t. rezultă

$$\int_A |f_m - f| d\lambda \leq \liminf_n \|f_m - f_{k_n}\|_1$$

şi, cum $\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_{k_n}\|_1 = 0$, rezultă, pe de o parte că $f_m - f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi deci că $f = f_m - (f_m - f) \in \mathcal{L}^1(A)$ şi, pe de altă parte, că $\|f_m - f\|_1 \to 0$.

■

3.4 Cadru abstract

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsura μ completă şi σ-finită pe σ-algebra $\mathcal{A}$, fie $\mathcal{E}(X)$ mulţimea funcţiilor $\mathcal{A}$-etajate, $\mathcal{E}_+(X)$ mulţimea funcţiilor etajate şi pozitive şi $\mathcal{M}(X)$ mulţimea funcţiilor măsurabile pe X. Oricare ar fi $f = \sum_{i=1}^p a_i \cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{E}_+(X)$ şi $A \in \mathcal{A}$, definim

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^p a_i \cdot \mu(A_i \cap A) \in [0, +\infty].$$

Spunem că f este **integrabilă** pe A dacă $\int_A f d\mu < +\infty$.
Funcţia f este **integrabilă** dacă $\int_X f d\mu < +\infty$.

Vom nota cu $\mathcal{E}^1_+(X)$ mulţimea funcţiilor etajate pozitive şi integrabile.

Dacă înlocuim $\mathcal{L}$ cu $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{E}_+(A)$ cu $\mathcal{E}_+(X)$ regăsim în acest cadru abstract proprietăţile din propoziţia 3.1.3:

3.4.1 Propoziţie. *Fie $f, g \in \mathcal{E}_+(X)$ şi $c \in \mathbb{R}_+$; atunci*

1). $cf \in \mathcal{E}_+(X)$ *şi* $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$.
2). $f + g \in \mathcal{E}_+(X)$ *şi* $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.
3). $f \leq g \Longrightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
4). $\forall B, C \in \mathcal{A}, B \subseteq C \Longrightarrow \int_B f d\mu \leq \int_C f d\mu$.
5). $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \delta, \int_B f d\mu < \varepsilon$.

3.4.2 Definiţie. Fie $f \in \mathcal{M}_+(X)$ o funcţie măsurabilă şi pozitivă pe X şi fie $A \in \mathcal{A}$; definim

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A \varphi d\mu : \varphi \in \mathcal{E}_+(X), \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

f este **integrabilă** dacă $\int_X f d\mu < +\infty$. Fie $\mathcal{L}^1_+(X)$ mulţimea funcţiilor integrabile şi pozitive pe X.

Regăsim rezultatele din propoziţia 3.1.6:

3.4.3 Propoziţie. *Fie $A \in \mathcal{A}$, $f, g \in \mathcal{M}_+(X)$ şi $c \geq 0$; atunci:*
1). $cf \in \mathcal{M}_+(X)$ *şi* $\int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$.
2). $f \leq g \Longrightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.
3). $\forall B, C \in \mathcal{A}, B \subseteq C \Longrightarrow \int_B f d\mu \leq \int_C f d\mu$.

Se pot demonstra de asemenea: teorema convergenţei monotone, teorema lui Beppo Levi şi lema lui Fatou.

3.4.4 Teoremă (teorema convergenţei monotone).
Fie $f : X \to \mathbb{R}_+$ şi $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_+(X)$ a.î. $f_n \leq f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $f_n \uparrow f$; atunci $f \in \mathcal{M}_+(X)$ şi $\int_X f_n d\mu \uparrow \int_X f d\mu$.

3.4.5 Teoremă (teorema lui Beppo Levi).
Fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}_+(X)$ un şir cu proprietatea că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă punctual pe X şi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; atunci $f \in \mathcal{M}_+(X)$ şi

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

3.4.6 Teoremă (lema lui Fatou).
Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_+(X)$ a.î. $f = \liminf_n f_n < +\infty$; atunci:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Fie $f \in \mathcal{M}(X), f = f^+ - f^-$, unde $f^+ = \sup\{f, \underline{0}\} \in \mathcal{M}_+(X)$ şi $f^- = \sup\{-f, \underline{0}\} \in \mathcal{M}_+(X)$.

Dacă una dintre funcţiile f^+ sau f^- este integrabilă atunci definim

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Dacă amândouă funcţiile f^+ şi f^- sunt integrabile atunci spunem că f este **integrabilă**. Vom nota cu $\mathcal{L}^1(X)$ mulţimea funcţiilor integrabile pe X. Oricare ar fi $A \in \mathcal{A}, \int_A f d\mu = \int_X \chi_A \cdot f d\mu$. Funcţia f este integrabilă pe A dacă $\int_A f d\mu$ este finită; $\mathcal{L}^1(A)$ este mulţimea funcţiilor integrabile pe A.

Şi în cadru abstract funcţionează (cu adaptările corespunzătoare) rezultatele 3.2.2 - 3.2.8, 3.2.10, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5 - 3.3.9:

3.4.7 Teoremă. *Fie $f \in \mathcal{M}(X)$; atunci $f \in \mathcal{L}^1(X) \iff |f| \in \mathcal{L}^1_+(X)$ şi, în acest caz,*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int |_X f| d\mu.$$

3.4.8 Teoremă. *Fie $f : X \to \mathbb{R}$.*
1). Dacă $f = \underline{0}$ μ-a.p.t. pe X, atunci $f \in \mathcal{L}^1(X)$ şi $\int_X f d\mu = 0$.
2). Dacă $\mu(A) = 0$, atunci $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $\int_A f d\mu = 0$.

3.4.9 Teoremă. *Fie $f \in \mathcal{L}^1(X)$.*
a). Dacă $\int_A f d\mu \geq 0$, oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$, atunci $f \geq \underline{0}$ μ-a.p.t. pe X.
b). Dacă $\int_A f d\mu \leq 0$, oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$, atunci $f \leq \underline{0}$ μ-a.p.t. pe X.
c). Dacă $\int_A f d\mu = 0$, oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$, atunci $f = \underline{0}$ μ-a.p.t. pe X.

3.4.10 Teoremă (teorema de dominare). *Fie $f \in \mathcal{M}(X)$ şi $g \in \mathcal{L}^1_+(X)$ a.î. $|f| \leq g$; atunci $f \in \mathcal{L}^1(X)$.*

3.4.11 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{A}$ şi $f \in \mathcal{M}(X)$; dacă $f \in \mathcal{L}^1(X)$ atunci $f \in \mathcal{L}^1(A)$.*

3.4.12 Teoremă. *O funcţie măsurabilă şi mărginită pe o mulţime de măsură finită este integrabilă.*

3.4.13 Teoremă. *$\mathcal{L}^1(X)$ se organizează ca un spaţiu vectorial real iar aplicaţia $I : \mathcal{L}^1(X) \to \mathbb{R}, I(f) = \int_X f d\mu$, este liniară:*
1). $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \forall f, g \in \mathcal{L}^1(X)$;

2). $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu, \forall f \in \mathcal{L}^1(X), \forall c \in \mathbb{R}$.

3.4.14 Teoremă. *Fie $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$; atunci*
1). $f \leq g \Longrightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$;
2). $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall A \in \mathcal{A}$ *cu* $\mu(A) < \delta, \int_A |f| d\mu < \varepsilon$;
3). $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \in \mathcal{A}$ *cu* $\mu(A_0) < +\infty$ *a.î.* $\int_{X \setminus A_0} |f| d\mu < \varepsilon$;
4). $$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu, (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m.$$

3.4.15 Teoremă.
Fie $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(X) \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu, \forall f \in \mathcal{L}^1(X)$; atunci
1). $\|f\|_1 = 0 \iff f = \underline{0}$ $\mu -$ *a.p.t.*
2). $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1, \forall f \in \mathcal{L}^1(X), \forall c \in \mathbb{R}$.
3). $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1, \forall f, g \in \mathcal{L}^1(X)$.

3.4.16 Teoremă. *Fie* $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(X)$ *şi* $f \in \mathcal{L}^1(X)$*;*

1). $f_n \xrightarrow[X]{\|\cdot\|_1} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[X]{\mu} f$.
2). $(f_n)_n$ *Cauchy în medie* $\Longrightarrow (f_n)_n$ *Cauchy în măsură.*

3.4.17 Teoremă (teorema convergenţei dominate).
Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(X)$ *şi* $g \in \mathcal{L}^1(X)$ *a.î.*
1). $f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f$ *şi*
2). $|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$.
Atunci $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(X), f \in \mathcal{L}^1(X)$, $f_n \xrightarrow[X]{\|\cdot\|_1} f$ *şi* $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$.

3.4.18 Teoremă (teorema convergenţei mărginite).
Fie $\mu(X) < +\infty$, $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(X)$ *şi* $c \in \mathbb{R}_+$ *a.î.*
1). $f_n \xrightarrow[X]{\cdot} f$ *şi*
2). $|f_n| \leq \underline{c}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Atunci $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1(X), f \in \mathcal{L}^1(X)$ *şi* $f_n \xrightarrow[X]{\|\cdot\|_1} f$, $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$.

Spaţiul $(\mathcal{L}^1(X), \|\cdot\|_1)$ este spaţiu seminormat complet iar mulţimea funcţiilor etajate şi integrabile $\mathcal{E}^1(X) = \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{L}^1(X)$ este densă în $\mathcal{L}^1(X)$ în raport cu topologia convergenţei în medie.

3.5 Comparaţie între integralele Riemann şi Lebesgue

În acest paragraf vom compara integrala Lebesgue cu integrala Riemann atât pe intervale compacte cât şi pe intervale necompacte.

3.5.1 Teoremă. $\mathcal{R}_{[a,b]} \subsetneq \mathcal{L}^1([a,b])$ *şi* $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$*, oricare ar fi* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Demonstraţie. În corolarul 3.2.9 am arătat că $\mathcal{R}_{[a,b]} \subsetneq \mathcal{L}^1(A)$; să arătăm acum integrala Riemann este restricţia integralei Lebesgue la spaţiul $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Fie $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Oricare ar fi o divizare a intervalului compact $[a,b]$, $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$ şi oricare ar fi $k = 0, 1, \cdots, n$, fie

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \text{ şi } M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x);$$

atunci

$$s_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot (x_{k+1} - x_k) \text{ şi } S_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

sunt sumele Darboux inferioară şi respectiv superioară asociate funcţiei f şi divizării Δ pe $[a, b]$.

$\underline{I} = \sup\limits_{\Delta \in \mathcal{D}([a,b])} s_\Delta$ este integrala Darboux inferioară iar $\overline{I} = \inf\limits_{\Delta \in \mathcal{D}([a,b])} S_\Delta$ integrala Darboux superioară. Teorema lui Darboux afirmă că, deoarece f este integrabilă Riemann, $\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$.
Pe de altă parte să considerăm funcţiile etajate $f_\Delta, F_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin $f_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \chi_{[x_k,\, x_{k+1})}$ respectiv $F_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \chi_{[x_k,\, x_{k+1})}$. Atunci $f_\Delta, F_\Delta \in \mathcal{E}([a, b]) = \mathcal{E}^1([a, b]) \subseteq \mathcal{L}^1([a, b])$ (vezi 3.3.11 (i)) şi, deoarece $f_\Delta \le f \le F_\Delta$ a.p.t., $s_\Delta = \int_{[a,b]} f_\Delta d\lambda \le \int_{[a,b]} f d\lambda \le \int_{[a,b]} F_\Delta d\lambda = S_\Delta$.
Divizarea Δ fiind arbitrară în $\mathcal{D}([a, b])$ rezultă $\underline{I} \le \int_{[a,b]} f d\lambda \le \overline{I}$ de unde $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$. ∎

Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \le +\infty$, $a < b$ şi $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f \in \mathcal{R}_{[a,u]}, \forall u \in [a, b)$; reamintim că f este integrabilă Riemann în sens generalizat pe intervalul necompact $[a, b)$ dacă există $\lim_{u \uparrow b} \int_a^u f(x)dx$ şi este finită. Vom nota această limită cu $\int_a^{b-0} f(x)dx$ ($\int_a^{+\infty} f(x)dx$ dacă $b = +\infty$) şi o vom numi integrala generalizată Riemann (sau integrala improprie) a funcţiei f pe $[a, b)$; se mai spune că integrala generalizată este convergentă. Mulţimea funcţiilor integrabile Riemann în sens generalizat pe $[a, b)$ se va nota cu $\mathcal{R}_{[a,b)}$. Dacă $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b)}$ se spune că integrala generalizată $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergentă; o integrală absolut convergentă este convergentă dar reciproca nu este adevărată.

3.5.2 Teoremă. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \le +\infty, a < b$ şi $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f \in \mathcal{R}_{[a,u]}, \forall u \in [a, b)$; atunci*

$$f \in \mathcal{L}^1([a, b)) \Longleftrightarrow |f| \in \mathcal{R}_{[a,b)}$$

şi, în acest caz, $\int_{[a,b)} f d\lambda = \int_a^{b-0} f(x)dx$.

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Presupunem că $f \in \mathcal{L}^1([a, b))$; atunci $|f| \in \mathcal{L}^1([a, b))$ şi $\mu : \mathcal{L}([a, b)) \to \mathbb{R}_+$, $\mu(A) = \int_A |f| d\lambda$, este o măsură finită pe $\mathcal{L}(A)$ (vezi teorema 3.1.15).

Oricare ar fi un şir $(u_n)_n \subseteq [a, b), u_n \uparrow b$, mulţimile $A_n = [a, u_n]$ formează un şir ascendent în $\mathcal{L}([a, b))$ care converge la $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [a, b)$. Din proprietatea de continuitate a măsurii μ pe şiruri ascendente (vezi proprietatea 6)

din teorema 1.4.7), $\mu([a,b)) = \lim_n \mu(A_n)$ sau $\int_{[a,b)} |f| d\lambda = \lim_n \int_{[a,u_n]} |f| d\lambda$. Dar, din teorema precedentă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\int_{[a,u_n]} |f| d\lambda = \int_a^{u_n} |f(x)| dx$. Rezultă că există $\lim_n \int_a^{u_n} |f(x)| dx = \int_{[a,b)} |f| d\lambda$. Şirul $(u_n)_n$ fiind arbitrar cu proprietăţile menţionate, există deci $\lim_{u \uparrow b} \int_a^u |f(x)| dx = \int_{[a,b)} |f| d\lambda < +\infty$. Deci $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b)}$ şi

$$\int_a^{b-0} |f(x)| dx = \int_{[a,b)} |f| d\lambda.$$

Să remarcăm că relaţia de mai sus are loc pentru orice funcţie $g \in \mathcal{L}_+^1([a,b))$ care este integrabilă Riemann pe orice interval compact din $[a,b)$. Să o aplicăm pentru partea pozitivă şi pentru partea negativă a lui f: deoarece $f^+ = \frac{1}{2} \cdot (|f| + f), f^- = \frac{1}{2} \cdot (|f| - f) \in \mathcal{L}_+^1([a,b))$,

$$\int_a^{b-0} f^+(x) dx = \int_{[a,b)} f^+ d\lambda \text{ şi } \int_a^{b-0} f^-(x) dx = \int_{[a,b)} f^- d\lambda.$$

Rezultă că $\int_{[a,b)} f d\lambda = \int_a^{b-0} f(x) dx$.

($\Longleftarrow$): Presupunem că $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b)}$.

Dacă $b < +\infty$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, fie $f_n = f \cdot \chi_{[a,\, b\, -\, \frac{1}{n}]} \in \mathcal{L}([a,b))$ ($f \in \mathcal{R}_{[a,b-\frac{1}{n}]} \subseteq \mathcal{L}([a, b-\frac{1}{n}])$ şi $\underline{0} \in \mathcal{L}((b-\frac{1}{n}, b))$ - vezi exerciţiul 4) din 2.5). Deoarece $f_n \xrightarrow[{[a,b)}]{p} f$ rezultă că $f \in \mathcal{L}([a,b))$ (punctul 5) al teoremei 2.1.11). Atunci $|f| \in \mathcal{L}_+([a,b))$ (punctul 2) al propoziţiei 2.1.14). Rezultă că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| = |f| \cdot \chi_{[a,\, b\, -\, \frac{1}{n}]} \in \mathcal{L}_+([a,b))$ şi, deoarece $|f_n| \uparrow |f|$, teorema convergenţei monotone (teorema 3.1.7) ne asigură că

$$\int_a^{b-0} |f(x)| dx = \lim_n \int_a^{b-\frac{1}{n}} |f(x)| dx = \lim_n \int_{[a,b)} |f_n| d\lambda = \int_{[a,b)} |f| d\lambda.$$

Deci $\int_{[a,b)} |f| d\lambda < +\infty$ de unde $|f| \in \mathcal{L}_+^1([a,b))$ şi deci $f \in \mathcal{L}^1([a,b))$.

În cazul în care $b = +\infty$ se alege şirul $f_n = f \cdot \chi_{[a,\, n]}$. ∎

Observaţiile următoare punctează câteva dintre comparaţiile ce se pot face între cele două tipuri de integrale: integrala Riemann şi Lebesgue.

3.5.3 Observaţii. (i) Integrala Riemann este definită numai pe intervale pe când integrala Lebesgue se calculează pe clasa mult mai amplă a mulţimilor măsurabile.

(ii) Integrala Riemann este sensibilă la schimbarea valorilor funcţiei pe o mulţime de măsură nulă pe când integrala Lebesgue este invariantă la asemenea schimbări.

(iii) Pentru integrala Lebesgue avem criterii mult mai uşor de aplicat de trecere la limită sub integrală (teorema convergenţei dominate, teorema convergenţei mărginite) pe când la integrala Riemann avem nevoie de convergenţa uniformă pentru asemenea operaţie.

(iv) Integrala Lebesgue este numărabil aditivă în raport cu domeniul de integrare; integrala Riemann este doar finit aditivă. Intr-adevăr, dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(A)$ este un şir de mulţimi disjuncte două câte două, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ şi $f \in \mathcal{L}^1(A)$ atunci şirul $(f_n)_n$, definit prin $f_n = \sum_{k=1}^{n} f \cdot \chi_{A_k}$, este convergent la f şi dominat în modul de $|f|$. Teorema convergenţei dominate ne asigură atunci că $\int_A f d\lambda = \lim_n \int_A f_n d\lambda = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda$.

(v) Pe intervale compacte integrala Lebesgue este mai generală decât integrala Riemann: orice funcţie integrabilă Riemann este integrabilă şi Lebesgue dar există funcţii integrabile Lebesgue care nu sunt integrabile Riemann (funcţia lui Dirichlet).

Pe intervale necompacte integrala Riemann face deosebirea între convergenţa simplă şi convergenţă absolută. Astfel funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$, este integrabilă Riemann pe $[1, +\infty)$ (se poate aplica criteriul lui Dirichlet de convergenţă) dar $|f|$ nu este integrabilă Riemann ($|f(x)| \geq \frac{\sin x^2}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$; prima funcţie din diferenţa precedentă nu este integrabilă iar a doua este integrabilă pe $[1, +\infty)$). Din acest motiv $f \notin \mathcal{L}^1([1, +\infty))$.

3.6 Schimbarea de variabilă la integrala Lebesgue

În acest paragraf vom prezenta o formulă de schimbare de variabilă la integrala Lebesgue asemănătoare formulei corespunzătoare de la integrala Riemann. Una dintre problemele pe care le avem de rezolvat este de a găsi condiţiile care trebuie să le satisfacă o funcţie pentru ca să ducă mulţimi măsurabile Lebesgue în mulţimi măsurabile.

3.6.1 Teoremă. *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă, derivabilă cu derivata g' continuă pe $\mathbb{R}$ (o funcţie de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$).*

a). Oricare ar fi o mulţime neglijabilă $N \subseteq \mathbb{R}$, $g(N)$ este neglijabilă.

b). Oricare ar fi $A \in \mathcal{L}$, $g(A) \in \mathcal{L}$ şi $\lambda(g(A)) = \int_A |g'| d\lambda$.

Demonstraţie. Întâi vom observa că orice injecţie continuă pe $\mathbb{R}$ este strict monotonă. Să presupunem atunci că g este strict crescătoare. Rezultă că $g'(x) \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (dacă am presupune că există $x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $g'(x_0) < 0$ atunci, deoarece g' este continuă, $g'(x) < 0$ pe un întreg interval ce conţine x_0 ceea ce ar contrazice monotonia lui g).

a). Să presupunem întâi că N este o mulţime neglijabilă mărginită şi fie $a \in \mathbb{R}_+^*$ aşa fel încât $N \subseteq (-a, a) \subseteq [-a, a]$.
Funcţia g' fiind continuă pe compactul $[-a, a]$ este mărginită. Rezultă că funcţia g este lipschitziană pe $[-a, a]$; fie $L > 0$ aşa fel încât

$$|g(x) - g(y)| \leq L \cdot |x - y|, \forall x, y \in [-a, a].$$

N fiind o mulţime neglijabilă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un şir de intervale deschise $((a_p, b_p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ incluse în $[-a, a]$ aşa fel încât $N \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty}(a_p, b_p)$ şi $\sum_{p=1}^{\infty}(b_p - a_p) < \frac{\varepsilon}{L}$.

Oricare ar fi $p \geq 1$ şi oricare ar fi $x, y \in (a_p, b_p)$, $|g(x)-g(y)| \leq L\cdot|x-y| \leq L \cdot (b_p - a_p)$. Deoarece g este crescătoare, $g((a_p, b_p)) = (g(a_p), g(b_p))$ şi, din inegalitatea de mai sus, $\lambda(g((a_p, b_p))) = g(b_p) - g(a_p) \leq L \cdot (b_p - a_p)$. Atunci

$$\lambda^*(g(N)) \leq \lambda^* \left(\bigcup_{p=1}^{\infty} g((a_p, b_p)) \right) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(g((a_p, b_p))) \leq L \cdot \sum_{p=1}^{\infty}(b_p - a_p) < \varepsilon.$$

Deci $\lambda^*(g(N)) = 0$, ceea ce spune că mulţimea $g(N)$ este neglijabilă.

Dacă N este neglijabilă şi nemărginită, putem să o reprezentăm ca o reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile mărginite; de exemplu $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, unde, pentru oricce $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = N \cap [-n.n]$. Atunci $g(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(N_n)$ ceea ce arată că $g(N)$ este o reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile deci este neglijabilă.

b). Vom remarca întâi că g este un homeomorfism (o funcţie bijectivă continuă cu inversa continuă). Atunci, pentru orice mulţime închisă $F \subseteq \mathbb{R}$, $g(F)$ este mulţime închisă. Într-adevăr, oricare ar fi şirul $(y_n)_n \subseteq g(F)$ cu $y_n \to y$, există $(x_n)_n \subseteq F$ aşa fel încât $y_n = g(x_n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $x_n = g^{-1}(y_n) \to g^{-1}(y) = x$. Deoarece F este închisă, $x \in F$ şi astfel $y = g(x) \in g(F)$.

Fie $A \in \mathcal{L}$. Conform exerciţiului 12 din 1.5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există o mulţime închisă $F_n \subseteq A$ astfel încât $\lambda(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Fie $N = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; atunci

$$\lambda(N) = \lambda \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus F_n) \right) \leq \lambda(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că $\lambda(N) = 0$. Punctul a) ne asigură că $g(N)$ este neglijabilă şi deci măsurabilă Lebesgue (vezi punctul 1) al teoremei 1.3.3). Atunci $g(A) = g(N) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} g(F_n)$ este mulţime măsurabilă (conform teoremei 1.3.6, $g(F_n)$ fiind mulţimi închise sunt măsurabile.

Să calculăm acum $\lambda(g(A))$. Deoarece am presupus că funcţia g este crescătoare, oricare ar fi intervalul deschis $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $g(I) = (g(a), g(b))$ este tot interval deschis şi

$$\lambda(g(I)) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x)dx = \int_I g' d\lambda = \int_I |g'| d\lambda.$$

Fie acum $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă şi fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ reprezentarea lui D (vezi teorema 1.1.3) ; atunci, cum intervalele deschise $g(I_n)$ sunt disjuncte două câte două,

$$\lambda(g(D)) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} g(I_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(g(I_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |g'| d\lambda = \int_D |g'| d\lambda$$

(la ultima egalitate de mai sus am folosit corolarul 3.1.10).

Fie acum $A \in \mathcal{L}$ o mulţime măsurabilă mărginită. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, fie $D_n \in \tau_u$ aşa fel încât $A \subseteq D_n$, $D_{n+1} \subseteq D_n$ şi $\lambda(D_n \setminus A) < \frac{1}{n}$; evident, putem presupune că toate mulţimile deschise D_n sunt mărginite şi deci că $\lambda(D_n) < +\infty$.

Fie $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$; atunci $N = B \setminus A$ este o mulţime neglijabilă şi $A = B \setminus N$. Atunci $g(A) = g(B) \setminus g(N)$ şi, deoarece $g(N)$ este neglijabilă, $\lambda(g(A)) = \lambda(g(B))$. Funcţia g duce mulţimi mărginite în mulţimi mărginite. Astfel $g(B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} g(D_n), g(D_{n+1}) \subseteq g(D_n)$ şi $\lambda(g(D_n)) < +\infty$. Măsura λ este continuă pe şiruri descendente (vezi punctul 7) al teoremei 1.3.11); atunci $\lambda(g(B)) = \lim_n \lambda(g(D_n))$. Aşadar,

$$\lambda(g(A)) = \lambda(g(B)) = \lim_n \lambda(g(D_n)) = \lim_n \int_{D_n} |g'| d\lambda =$$

$$(*) \qquad = \int_A |g'| d\lambda + \lim_n \int_{D_n \setminus A} |g'| d\lambda.$$

Mulţimea D_1 este mărginită şi g' este continuă şi mărginită pe D_1; deci $g' \in \mathcal{L}^1(D_1)$. Folosind proprietatea 2) din teorema 3.3.1, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ aşa fel încât, oricare ar fi $C \in \mathcal{L}(D_1)$ cu $\lambda(C) < \delta$, $\int_C |g'| d\lambda < \varepsilon$. Fie $n_0 \in \mathbb{N}^*$ aşa fel încât $\frac{1}{n_0} < \delta$; atunci, pentru orice $n \geq n_0, \lambda(D_n \setminus A) < \delta$

şi deci $\int_{D_n \setminus A} |g'| d\lambda < \varepsilon$. Astfel am arătat că $\lim_n \int_{D_n \setminus A} |g'| d\lambda = 0$ şi atunci din $(*)$ rezultă că $\lambda(g(A)) = \int_A |g'| d\lambda$.

Dacă A nu este mărginită, atunci ea se exprimă ca reuniune a unui şir ascendent de mulţimi măsurabile şi mărginite: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, unde $A_n = A \cap [-n, n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $g(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(A_n)$ şi, folosind proprietatea de continuitate a măsurii pe şiruri ascendente (proprietatea 6) din teorema 1.3.11) şi teorema convergenţei monotone (teorema 3.1.7),

$$\lambda(g(A)) = \lim_n \lambda(g(A_n)) = \lim_n \int_{A_n} |g'| d\lambda = \lim_n \int_A \chi_{A_n} \cdot |g'| d\lambda = \int_A |g'| d\lambda.$$

■

Vom da acum o teoremă de schimbare de variabilă la integrala Lebesgue.

3.6.2 Teoremă. *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un difeomorfism de clasă C^1 (g bijectivă, g derivabilă cu derivata continuă şi g^{-1} derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$) şi fie $A \in \mathcal{L}$.*

Pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(g(A))$, $(f \circ g) \cdot |g'| \in \mathcal{L}^1(A)$ şi

$$\int_{g(A)} f d\lambda = \int_A (f \circ g) \cdot |g'| d\lambda.$$

Demonstraţie. Din teorema precedentă ştim că $g(A) \in \mathcal{L}$. Vom demonstra teorema pentru diferite situaţii în care se poate afla funcţia $f \in \mathcal{L}^1(g(A))$.

1). Presupunem că $f = \chi_B$, unde $B \in \mathcal{L}(g(A))$ şi $\lambda(B) < +\infty$; atunci $f \in \mathcal{L}^1(g(A))$ şi, folosind teorema precedentă, $g^{-1}(B) \in \mathcal{L}(A)$. Funcţia $(f \circ g) \cdot |g'| = \chi_{g^{-1}(B)} \cdot |g'|$ este măsurabilă şi pozitivă pe A şi $\int_A (f \circ g) \cdot |g'| d\lambda = \int_{g^{-1}(B)} |g'| d\lambda = \lambda(B) = \int_{g(A)} f d\lambda < +\infty$. Deci $(f \circ g) \cdot |g'| \in \mathcal{L}^1(A)$.

2). Fie acum $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \chi_{B_i} \in \mathcal{E}_+^1(g(A))$; putem presupune că $\lambda(B_i) < +\infty$, pentru orice $i = 1, \ldots, p$.

$$\int_{g(A)} f d\lambda = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \int_{g(A)} \chi_{B_i} d\lambda = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \int_A (\chi_{B_i} \circ g) \cdot |g'| d\lambda =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \int_A \chi_{g^{-1}(B_i)} \cdot |g'| d\lambda = \int_A \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \chi_{g^{-1}(B_i)} \cdot |g'| d\lambda = \int_A (f \circ g) \cdot |g'| d\lambda.$$

3). Fie $f \in \mathcal{L}_+^1(g(A))$; există $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+^1(g(A))$ a.î. $f_n \uparrow f$. Din punctul precedent, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{g(A)} f_n d\lambda = \int_A (f_n \circ g) \cdot |g'| d\lambda.$$

Folosind teorema convergenţei monotone (teorema 3.1.7) în ambii membri ai relaţiei de mai sus obţinem formula dorită şi, deoarece funcţia $(f\circ g)\cdot|g'|$ are integrala finită, este integrabilă pe A.

4). În sfârşit fie $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^1(g(A))$; atunci $f^+, f^- \in\in \mathcal{L}^1_+(g(A))$ şi, din punctul precedent, $(f^+\circ g)\cdot|g'| = (f\circ g)^+\cdot|g'|, (f^-\circ g)\cdot|g'| = (f\circ g)^-\cdot|g'| \in \mathcal{L}^1_+(A)$; deci $(f\circ g)\cdot|g'| \in \mathcal{L}^1(A)$ şi, scăzând relaţiile:

$$\int_{g(A)} f^+ d\lambda = \int_A (f^+\circ g)\cdot|g'|d\lambda$$

$$\int_{g(A)} f^- d\lambda = \int_A (f^-\circ g)\cdot|g'|d\lambda$$

obţinem formula dorită. ■

3.7 Exerciţii

1). Dacă $A \in \mathcal{L}$ şi $f \in \mathcal{L}_+(A)$ cu $0 \le f(x) \le a$ atunci $0 \le \int_A f d\lambda \le a\lambda(A)$.

2). Dacă $\lambda(A) = 0$ şi $f \in \mathcal{L}_+(A)$ atunci $\int_A f d\lambda = 0$.

3). Dacă $f \in \mathcal{L}_+(A)$ atunci $\int_A f d\lambda \ge a\lambda(f \ge a), \forall a > 0$.

Dacă $f \in \mathcal{L}^1_+(A)$ atunci $\lim_{a\to+\infty} a\lambda(f \ge a) = 0$.

4). Să se calculeze $\int_{[0,+\infty)} e^{-[x]} d\lambda(x)$ ($[x]$ este partea întreagă a lui x).

5). Fie $f \in \mathcal{L}_+(\mathbb{R})$; arătaţi că, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)d\lambda(x)$.

6). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \alpha x + \beta$, cu $\alpha > 0$ şi $f(a) > 0$. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $c^n_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \ldots, n$ şi $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c^n_k)\cdot(c^n_{k+1} - c^n_k)$.

Să se arate că $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+([a,b])$ şi $f_n \uparrow f$. Să se calculeze integrala Lebesgue $\int_{[a,b]} f d\lambda$ şi să se compare cu integrala Riemann $\int_a^b f(x)dx$.

7). Fie $[c,d] \subseteq [a,b]$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [c,d], \\ 0 & , x \in [a,b]\setminus[c,d]. \end{cases}$

Să se arate că $\forall\varepsilon > 0, \exists g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă a.î.

$$\int_{[a,b]} |f - g|d\lambda < \varepsilon.$$

Indicaţie: Se defineşte $g(x) = f(x)$ dacă $x \in [a, c-\varepsilon]\cup[c,d]\cup[d+\varepsilon, b]$ şi g liniară pe intervalele $[c-\varepsilon, c]$ şi $[d, d+\varepsilon]$.

8). Fie $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $B, C \in \mathcal{L}(A)$; arătaţi că

$$\int_{B\cup C} f d\lambda = \int_B f d\lambda + \int_C f d\lambda - \int_{B\cap C} f d\lambda.$$

9). Fie $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$ funcţii mărginite pe A; arătaţi că $fg, f^2, g^2 \in \mathcal{L}^1(A)$ şi

$$\int_A |fg| d\lambda \leq \frac{1}{2}\left[\int_A f^2 d\lambda + \int_A g^2 d\lambda\right].$$

10). Pentru orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}_+$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}$, definim $f_p : A \to \mathbb{R}_+$ prin $f_p(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \leq p, \\ p & , f(x) > p. \end{cases}$

Arătaţi că dacă $f \in \mathcal{L}^1_+(A)$ atunci $(f_p) \subseteq \mathcal{L}^1_+(A)$ şi $\int_A f_p d\lambda \uparrow \int_A f d\lambda$.

Calculaţi pe această cale $\int_{(0,1]} f d\lambda$ unde $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \forall x \in (0,1]$.

11). Fie $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} n & , \dfrac{1}{2n+1} < x \leq \dfrac{2n}{4n^2-1} \\ -n & , \dfrac{2n}{4n^2-1} < x \leq \dfrac{1}{2n-1} \end{cases}$ $, n \in \mathbb{N}^*$. Este f integrabilă pe $(0,1]$?

12). Fie $f : [-3,3] \to \mathbb{R}, f(x) = 3 + e^x - e^{-x}$. Găsiţi f^+ şi f^-.

13). Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,\, n+1)}$; să se arate că este măsurabilă şi mărginită dar nu este integrabilă pe $\mathbb{R}$ (vezi corolarul 3.2.8).

14). Să se arate că funcţia $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \chi_{[n,\, n+1)}$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$.

15). Fie $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{E}(A)$; să se arate că $f \in \mathcal{L}^1(A)$ dacă şi numai dacă, pentru orice $i \in \{1, \cdots, p\}$ pentru care $a_i \neq 0$ rezultă $\lambda(A_i) < +\infty$. Să se deducă de aici că, dacă $\lambda(A) < +\infty$, atunci $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{L}^1(A)$.

16). Fie $A \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}(A), a \in \mathbb{R}$ şi $g : -a + A \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = f(a+x), \forall x \in -a + A$.

Să se arate că $g \in \mathcal{L}(-a + A)$ şi că

$$\int_A f d\lambda = \int_{-a+A} g d\lambda,$$

în sensul că, dacă una dintre cele două integrale există, atunci există şi cealaltă şi are loc egalitatea.

Indicaţie. Fie $T : -a + A \to A$, $T(x) = a + x$. Atunci $g = f \circ T$ şi deci, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, g^{-1}(-\infty, \alpha) = T^{-1}(f^{-1}(-\infty, \alpha)) \in \mathcal{L}$. Demonstraţia egalităţii se face pe rând în cazurile: 1). $f = \chi_E$, 2). $f = \sum_{i=1}^{p} c_i \cdot \chi_{E_i}$, 3). $f \in \mathcal{L}_+(A)$ şi 4). $f \in \mathcal{L}(A)$.

17). Folosind legătura între integralele Riemann şi Lebesgue, să se calculeze:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} dx \text{ şi } \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

18). Să se arate că, dacă $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1_+(A)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\lambda < +\infty$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a.p.t.

19). Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = n \cdot \chi_{[\frac{1}{n^3}, \frac{8}{n^3}]}$; să se arate că $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{\cdot} \underline{0}$ dar (f_n) nu converge uniform.

Să se arate că, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, unde $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Este adevărată egalitatea $\lim_n \int_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_{[0,1]} f d\lambda$?

20). Să se arate că $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, este integrabilă Riemann şi Lebesgue pe $[0, +\infty)$.

21). Fie $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2}, & 0 < x < n, \\ 0, & x \geq n. \end{cases}$

Să se verifice dacă $\lim_n \left(\displaystyle\int_{(0,\infty)} f_n d\lambda \right) = \displaystyle\int_{(0,\infty)} \left(\lim_n f_n \right) d\lambda$ şi să se explice rezultatul.

22). Fie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; să se arate că

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| d\lambda(x) = 0.$$

23). Fie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; să se arate că, $\forall k \in \mathbb{R}^*$, funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+k), h(x) = f(kx)$, sunt integrabile Lebesgue pe $\mathbb{R}$ şi

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \int_{\mathbb{R}} h d\lambda = \frac{1}{|k|} \cdot \int_A f d\lambda.$$

24). Fie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; să se calculeze

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin^n x d\lambda(x).$$

25). Să se arate că

$$\int_{[0,+\infty)} \frac{x}{e^x - 1} d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(se va efectua schimbarea de variabilă $e^x = \frac{1}{1-y}$).

26). Fie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; să se arate că

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{(|x|>n)} f(x) d\lambda(x) = 0.$$

Este necesar ca $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$?

27). Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; folosind formula de schimbare de variabilă să se arate că, pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(\alpha A + \beta)$, $f(\alpha \cdot +\beta) \in \mathcal{L}^1(A)$ şi

$$\int_{\alpha A+\beta} f(y)d\lambda(y) = |\alpha| \int_A f(\alpha x + \beta)d\lambda(x).$$

28). Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu abstract cu măsură pozitivă σ-finită şi completă şi fie $A \in \mathcal{A}$; definim $\mu_A : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ prin $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$. Să se arate că orice funcţie μ_A-integrabilă este μ-integrabilă.

Capitolul 4

Spaţiile L^p

Acest capitol este dedicat unei clase de spaţii Banach construite cu ajutorul noţiunii de funcţie integrabilă - aşa–numitele spaţii Lebesgue, sau spaţii Banach clasice.

În primul paragraf vom prezenta structura algebrică şi structura topologică a acestor spaţii. Paragraful doi este rezervat studiului proprietăţilor de densitate în L^p.

Un caz limită al spaţiilor Lebesgue, spaţiul L^∞, este studiat în paragraful trei iar în ultimul paragraf se studiază seriile Fourier pe L^2.

4.1 Structura algebrică şi topologică

4.1.1 Definiţie. Fie $A \in \mathcal{L}, p \in \mathbb{R}, p \geq 1$; o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte p**-integrabilă** pe mulţimea A dacă $f \in \mathcal{L}(A)$ şi $|f|^p \in \mathcal{L}^1(A)$.

Vom nota cu $\mathcal{L}^p(A)$ mulţimea funcţiilor p-integrabile pe A.

În cazul particular $p = 1$ regăsim spaţiul $\mathcal{L}^1(A)$ studiat în capitolul precedent; într-adevăr, $f \in \mathcal{L}^1(A)$ dacă şi numai dacă $|f| \in \mathcal{L}^1(A)$ (vezi teorema 3.2.2).

Definim aplicaţia $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(A) \to \mathbb{R}_+$ prin

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in \mathcal{L}^p(A).$$

4.1.2 Propoziţie. *$\mathcal{L}^p(A)$ este spaţiu vectorial real.*

Demonstraţie. Multimea funcţiilor reale definite pe A, $F(A, \mathbb{R})$, este spaţiu vectorial faţă de operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari (operaţii definite punctual). Pentru a arăta că $\mathcal{L}^p(A) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial este suficient să demonstrăm că suma a două funcţii din $\mathcal{L}^p(A)$ rămâne în $\mathcal{L}^p(A)$ şi că produsul dintre un scalar real şi o funcţie din $\mathcal{L}^p(A)$ este în $\mathcal{L}^p(A)$.

Fie $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$; atunci $f, g \in \mathcal{L}(A)$ şi deci $f + g \in \mathcal{L}(A)$. Pe de altă parte funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(y) = |y|^p$, este continuă şi deci $h \circ (f + g) = |f + g|^p \in \mathcal{L}(A)$ (vezi teorema 2.1.9).

$$(*) \qquad |f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \cdot \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p).$$

Funcţia $2^p \cdot (|f|^p + |g|^p)$ este integrabilă şi, din $(*)$, domină funcţia măsurabilă $|f + g|^p$; teorema de dominare (3.2.6) ne asigură că $|f + g|^p \in \mathcal{L}^1(A)$ şi deci $f + g \in \mathcal{L}^p(A)$.

Oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{L}^p(A)$, $c \cdot f \in \mathcal{L}(A)$ şi $|c \cdot f|^p = |c|^p \cdot |f|^p \in \mathcal{L}^1(A)$; deci $c \cdot f \in \mathcal{L}^p(A)$. ∎

4.1.3 Lemă. *Fie $p, q > 1$ a.î. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (vom spune că p şi q sunt conjugate); $\forall a, b \geq 0$,*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstraţie. $f(x) = ax - \dfrac{a^p}{p} - \dfrac{x^q}{q}, \forall x \geq 0$, defineşte o funcţie derivabilă $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$; derivata sa, $f'(x) = a - x^{q-1}$, se anulează pentru $x_0 = a^{\frac{1}{q-1}}$. Se observă imediat că f este crescătoare pe $[0, x_0]$ şi descrescătoare pe $[x_0, +\infty)$.

Rezultă că $f(x) \leq f(x_0) = f(a^{\frac{1}{q-1}}) = a \cdot a^{\frac{1}{q-1}} - \frac{a^p}{p} - \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} = a^p \cdot (1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}) = 0$ sau $f(x) \leq 0, \forall x \geq 0$, ceea ce demonstrează lema. ∎

4.1.4 Teoremă (inegalitatea lui Hölder).

Fie $p, q > 1$ două numere conjugate ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

$\forall f \in \mathcal{L}^p(A), \forall g \in \mathcal{L}^q(A), f \cdot g \in \mathcal{L}^1(A)$ şi

$$\int_A |f \cdot g| d\lambda \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = \left(\int_A |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_A |g|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstraţie. Dacă $\|f\|_p = 0$, atunci $\int_A |f|^p d\lambda = 0$, de unde $f = \underline{0}$ a.p.t. (teorema 3.3.2). Atunci $f \cdot g = \underline{0}$ a.p.t. şi, aplicând din nou teorema 3.3.2, $\|f \cdot g\|_1 = \int_A |fg| d\lambda = 0 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. La fel raţionăm dacă $\|g\|_q = 0$.

Să presupunem acum că $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. În inegalitatea din lema precedentă înlocuim: $a = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ şi $b = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$; obţinem atunci:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \forall x \in A.$$

Aceeaşi inegalitate poate fi scrisă funcţional:

$$(*) \qquad |fg| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q \left(\frac{1}{p||f||_p^p} \cdot |f|^p + \frac{1}{q||g||_q^q} \cdot |g|^q \right).$$

Deoarece $f \in \mathcal{L}^p(A)$ şi $g \in \mathcal{L}^q(A)$, rezultă că $fg \in \mathcal{L}(A)$ şi $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1(A)$. Atunci

$$h = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \left(\frac{1}{p\|f\|_p^p} |f|^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} |g|^q \right) \in \mathcal{L}^1(A).$$

Din (*), $|fg| \leq h$; teorema de dominare (vezi 3.2.6) antrenează $fg \in \mathcal{L}^1(A)$.

Integrala fiind monotonă (punctul 1) al teoremei 3.3.1) şi liniară (teorema 3.2.10), putem integra acum în inegalitatea (*) şi obţinem:

$$\int_A |fg| d\lambda \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \left(\frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_A |f|^p d\lambda + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_A |g|^q d\lambda \right) =$$

$$= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \left(\frac{1}{p||f||_p^p} \cdot ||f||_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \cdot \|g\|_q^q \right) = \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \qquad \blacksquare$$

4.1.5 Teoremă (inegalitatea lui Minkowski).

Oricare ar fi $p \geq 1, \forall f, g \in \mathcal{L}^p(A)$,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstraţie. Dacă $p = 1$ inegalitatea este evidentă (vezi punctul 3) al teoremei 3.3.2).

Să presupunem acum că $p > 1$ şi fie $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$. Din propoziţia 4.1.2 ştim că $f + g \in \mathcal{L}^p(A)$.

Dacă $\|f + g\|_p = 0$, atunci inegalitatea lui Minkowski este evidentă.

Presupunem deci în plus că $\|f + g\|_p > 0$. Fie $q = \frac{p}{p-1} > 1$; atunci $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şi funcţia $h = |f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(A)$. Într-adevăr, h este compunerea

dintre funcţia măsurabilă $f+g$ şi funcţia continuă $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, l(y)=|y|^{p-1}$; conform propoziţiei 2.1.9, $h=l\circ(f+g)\in\mathcal{L}(A)$. În plus, $|h|^q=|f+g|^p\in\mathcal{L}^1(A)$ $(f+g\in\mathcal{L}^p(A))$ şi deci $h\in\mathcal{L}^q(A)$.

Rezultă din inegalitatea lui Hölder că $|f+g|^{p-1}\cdot|f|=h|f|\in\mathcal{L}^1(A)$ şi $|f+g|^{p-1}\cdot|g|=h|g|\in\mathcal{L}^1(A)$. Atunci, utilizând proprietăţile de monotonie şi de liniaritate ale integralei,

$$(\|f+g\|_p)^p=\int_A|f+g|^p d\lambda=\int_A|f+g|^{p-1}\cdot|f+g|d\lambda\le$$

$$\le\int_A|f+g|^{p-1}(|f|+|g|)d\lambda=\int_A|f+g|^{p-1}|f|d\lambda+\int_A|f+g|^{p-1}|g|d\lambda.$$

Dar, conform inegalităţii lui Hölder,

$$\int_A f+g|^{p-1}\cdot|f|d\lambda=\|fh\|_1\le\|f\|_p\cdot\|h\|_q,$$

$$\int_A|f+g|^{p-1}\cdot|g|d\lambda=\|gh\|_1\le\|g\|_p\cdot\|h\|_q.$$

Atunci:

$$(||f+g||_p)^p\le(||f||_p+||g||_p)\cdot||h||_q=$$

$$=(||f||_p+||g||_p)\cdot\left(\int_A|f+g|^{(p-1)q}d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=(||f||_p+||g||_p)\cdot\left(\int_A|f+g|^p d\lambda\right)^{\frac{p-1}{p}}=(||f||_p+||g||_p)\cdot(||f+g||_p)^{p-1}.$$

Simplificând în inegalitatea precedentă cu $(||f+g||_p)^{p-1}$, obţinem

$$||f+g||_p\le||f||_p+||g||_p.$$

■

4.1.6 Teoremă. *Spaţiul* $(\mathcal{L}^p(A),\|\cdot\|_p)$ *este spaţiu seminormat.*

Demonstraţie. $\|f\|_p=0\Leftrightarrow f=\underline{0}$, a.p.t. (teorema 3.3.2).

Oricare ar fi $c\in\mathbb{R}$ şi $f\in\mathcal{L}^p(A), \|c\cdot f\|_p=\left(\int_A|c\cdot f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}=|c|\cdot\|f\|_p$.

Inegalitatea triunghiulară este chiar inegalitatea lui Minkowski. ■

4.1.7 Definiţie. Fie $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^p(A), f \in \mathcal{L}^p(A)$. Dacă $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ spunem că şirul (f_n) este convergent **în medie de ordin** p pe A la f şi notăm aceasta cu $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f$.

(f_n) este şir Cauchy în medie de ordin p dacă $\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_n\|_p = 0$.

f este aderent în medie de ordin p la $F \subseteq \mathcal{L}^p(A)$ dacă există un şir $(g_n) \subseteq F$ a.î. $g_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f$.

Notăm cu $\overline{F}^p$ mulţimea punctelor aderente în medie de ordin p la F.

4.1.8 Propoziţie. *Fie $p \geq 1$; relaţia $f \sim g \Longleftrightarrow f = g$ a.p.t. este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{L}^p(A)$.*

Demonstraţie. Să observăm întâi că, dacă $f \in \mathcal{L}^p(A)$ şi $f = g$ a.p.t. aunci $g \in \mathcal{L}^p(A)$ şi $\|f\|_p = \|g\|_p$. Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{L}^p$ atunci $f \in \mathcal{L}(A)$ (vezi punctul 1) al teoremei 2.1.6); deoarece $|f|^p = |g|^p$ a.p.t., $\int_A |f|^p d\lambda = \int_A |g|^p d\lambda$ (teorema 3.2.11) şi deci $g \in \mathcal{L}^p(A)$ şi $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Relaţia $\sim$ este în mod evident reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{L}^p(A)$.

4.1.9 Definiţie. Notăm spaţiul cât $\mathcal{L}^p(A)|_\sim$ cu $L^p(A)$; elementele acestui spaţiu sunt de forma: $[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(A) : f \sim g\}$.

Remarcăm că $L^p(A)$ este spaţiu vectorial real: $[f] + [g] = [f + g], c \cdot [f] = [c \cdot f] \in L^p(A), \forall f, g \in \mathcal{L}^p(A), \forall c \in \mathbb{R}$. În plus, $\forall g \in [f], \int_A |f|^p d\lambda = \int_A |g|^p d\lambda$. Putem deci defini în mod consistent aplicaţia

$$\| \cdot \|_p : L^p(A) \to \mathbb{R}_+, \|[f]\|_p = \|f\|_p, \forall [f] \in L^p(A).$$

4.1.10 Teoremă. *Spaţiul $(L^p(A), \| \cdot \|_p)$ este un spaţiu normat real.*

4.1.11 Teoremă. *Fie $p \geq 1, (f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p(A)$ şi $f \in \mathcal{L}^p(A)$; atunci:*

1). $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

2). *Dacă $(f_n)_n$ este şir Cauchy în medie de ordin p atunci $(f_n)_n$ este şir Cauchy în măsură.*

Demonstraţie. 1). $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, fie $A_n(\varepsilon) = (|f_n - f| > \varepsilon) \in \mathcal{L}$. Atunci:

$$|f_n - f|^p \geq |f_n - f|^p \chi_{A_n(\varepsilon)} \geq \varepsilon^p \chi_{A_n(\varepsilon)}.$$

Utilizând acum monotonia integralei, obţinem:

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_A |f_n - f|^p d\lambda \geq \varepsilon^p \lambda(A_n(\varepsilon)), \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda(A_n(\varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \cdot \|f_n - f\|_p^p$.

Deoarece $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f$, rezultă că $\lim_n \lambda(A_n(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$, ceea ce antrenează $f_n \xrightarrow[A]{\lambda} f$.

2) se demonstrează similar înlocuind $A_n(\varepsilon)$ cu $A_{m,n}(\varepsilon) = (|f_m - f_n| > \varepsilon)$. ∎

În cazul în care $\lambda(A) < +\infty$ putem compara între ele spaţiile $\mathcal{L}^p(A)$ şi topologiile generate de semi-normele $\|\cdot\|_p$ pe aceste spaţii.

4.1.12 Teoremă. *Dacă* $\lambda(A) < +\infty$ *şi* $1 \leq p < r$ *atunci* $\mathcal{L}^r(A) \subseteq \mathcal{L}^p(A)$ *şi* $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_r} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f, \forall (f_n) \subseteq \mathcal{L}^r(A), f \in \mathcal{L}^r(A)$.

Demonstraţie. Fie $p_1 = \frac{r}{p} > 1$ şi $q_1 = \frac{r}{r-p} > 1$; atunci $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$.
$\forall f \in \mathcal{L}^r(A), f \in \mathcal{L}(A)$ şi $|f|^r \in \mathcal{L}^1(A)$. Rezultă că $|f|^p \in \mathcal{L}^{\frac{r}{p}}(A) = \mathcal{L}^{p_1}(A)$.

Deoarece $\lambda(A) < +\infty$, $\underline{1} \in \mathcal{L}^{q_1}(A)$.

Putem aplica acum funcţiilor $|f|^p$ şi $\underline{1}$ inegalitatea lui Hölder (vezi 4.1.4); deci $|f|^p \cdot \underline{1} = |f|^p \in \mathcal{L}^1(A)$.

Rezultă, pe de o parte, că $f \in \mathcal{L}^p(A)$ şi astfel $\mathcal{L}^r(A) \subseteq \mathcal{L}^p(A)$.

Pe de altă parte, inegalitatea lui Hölder antrenează:

$$\int_A |f|^p d\lambda \leq \left(\int_A |f|^{p \cdot p_1} d\lambda\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_A \underline{1} d\lambda\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

sau, echivalent:

$$\|f\|_p^p \leq \left(\int_A |f|^r d\lambda\right)^{\frac{p}{r}} \cdot \lambda(A)^{\frac{r-p}{r}} = \|f\|_r^p \cdot \lambda(A)^{\frac{r-p}{r}}.$$

Ultima inegalitate implică:

$$\|f\|_p \leq [\lambda(A)]^{\frac{r-p}{pr}} \cdot \|f\|_r, \forall f \in \mathcal{L}^r(A).$$

Rezultă că oricare ar fi $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^r(A)$ şi $f \in \mathcal{L}^r(A)$,

$$\|f_n - f\|_p \leq [\lambda(A)]^{\frac{r-p}{pr}} \cdot \|f_n - f\|_r$$

ceea ce demonstrează că, dacă şirul $(f_n)_n$ converge în medie de ordin r la f, atunci el converge şi în medie de ordin p la f . ∎

4.1.13 Observaţii. (i) Condiţia ca A să fie de măsură finită este esenţială în teorema precedentă. Într-adevăr fie aplicaţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$. $f \in C([1, +\infty)) \subseteq \mathcal{L}([1, +\infty))$ şi, $\forall p > 1$,

$$\int_{[1,+\infty)} |f|^p d\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

Rezultă că $f \in \mathcal{L}^p([1, +\infty)), \forall p > 1$ dar $f \notin \mathcal{L}^1([1, +\infty))$.

(ii) În cazul în care A este o mulţime de măsură finită şi $p < r$, urma topologiei indusă de seminorma $\| \cdot \|_p$ pe submulţimea $\mathcal{L}^r(A) \subseteq \mathcal{L}^p(A)$ este mai puţin fină decât topologia indusă de seminorma $\| \cdot \|_r$ pe aceeaşi submulţime.

4.2 Proprietăţi de densitate în $\mathcal{L}^p$

4.2.1 Teoremă. *Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $p \geq 1$; atunci:*

1). $\mathcal{E}^1(A) = \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{L}^p(A)$.

2). $\overline{\mathcal{E}^1(A)}^p = \mathcal{L}^p(A)$.

Demonstraţie. 1). Fie $f \in \mathcal{E}(A)$; atunci $f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i}$, unde $\{A_1, \cdots, A_n\}$ este o partiţie măsurabilă a mulţimii A. Atunci

$$f \in \mathcal{L}^p(A) \Longleftrightarrow |f|^p = \sum_{i=1}^n |a_i|^p \cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{L}^1(A) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i|^p \lambda(A_i) < +\infty \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i| \lambda(A_i) < +\infty \Longleftrightarrow f \in \mathcal{E}^1(A).$$

2). Incluziunea $\overline{\mathcal{E}^1(A)}^p \subseteq \mathcal{L}^p(A)$ este evidentă; să demonstrăm incluziunea inversă.

Oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^p(A), f = f^+ - f^-$ unde $f^+, f^- \in \mathcal{L}_+(A)$. Există două şiruri $(u_n)_n, (v_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+(A)$ a.î. $u_n \uparrow f^+$ şi $v_n \uparrow f^-$ (vezi punctul 1) din teorema 2.3.3). Şirul $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(A), f_n = u_n - v_n$, este convergent punctual pe A la f; în plus, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n|^p \leq (u_n + v_n)^p \leq (f^+ + f^-)^p = |f|^p \in \mathcal{L}^1(A)$$

de unde, folosind teorema de dominare (teorema 3.2.6),

$$(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{L}^p(A) = \mathcal{E}^1(A).$$

Pe de altă parte

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^{p+1} \cdot |f|^p$$

şi, cum $f_n \to f$, rezultă din teorema convergenţei dominate (teorema 3.3.7) că

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_A |f_n - f|^p d\lambda \to 0,$$

ceea ce este echivalent cu $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f$. Deci $f \in \overline{\mathcal{E}^1(A)}^p$. ■

O consecinţă imediată a teoremei de mai sus este completitudinea spaţiului $\mathcal{L}^p(A)$.

4.2.2 Teoremă. *Spaţiul seminormat* $(\mathcal{L}^p(A), \|\cdot\|_p)$ *este complet,* $\forall p \geq 1$.

Demonstraţie. Demonstraţia este analoagă celei care probează completitudinea spaţiului $\mathcal{L}^1(A)$ (teorema 3.3.12).

Din teorema 4.1.11, 2), rezultă că orice şir $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p(A)$ Cauchy în medie de ordin p este Cauchy în măsură. Punctul 1) al teoremei lui Riesz (teorema 2.2.5) pune în evidenţă un subşir $(f_{k_n})_n$ al şirului $(f_n)_n$ convergent aproape uniform la o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$. Teorema 2.2.2, 2), afirmă că $f_{k_n} \xrightarrow[A]{\cdot} f$ şi atunci $f \in \mathcal{L}(A)$ (punctul 3) din teorema 2.1.6).

Fixăm $m \in \mathbb{N}$; oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fie $g_n = |f_m - f_{k_n}|^p \in \mathcal{L}_+(A)$. Aplicăm şirului $(g_n)_n$ lema lui Fatou (vezi corolarul 3.1.11):

$$\int_A \liminf_n g_n d\lambda \leq \liminf_n \int_A g_n d\lambda.$$

Deoarece $\liminf_n g_n = |f_m - f|^p$ a.p.t. rezultă

$$\int_A |f_m - f|^p d\lambda \leq \liminf_n \|f_m - f_{k_n}\|_p^p$$

şi, cum $\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_{k_n}\|_p^p = 0$, rezultă, pe de o parte că $f_m - f \in \mathcal{L}^p(A)$ şi deci că $f = f_m - (f_m - f) \in \mathcal{L}^p(A)$ şi, pe de altă parte, că $\|f_m - f\|_p \to 0$.

■

4.2.3 Observaţii. (i) Spaţiul $(L^p(A), \|\cdot\|_p)$ este spaţiu Banach.

(ii) $\mathcal{L}^p(A)$ este completatul spaţiului $\mathcal{E}^1(A)$ în raport cu seminorma $\|\cdot\|_p$.

4.2.4 Teoremă. *Fie* $C_p(A) = C(A) \cap \mathcal{L}^p(A)$ *- mulţimea funcţiilor continue p-integrabile; atunci, oricare ar fi* $p \geq 1$,

$$\overline{C_p(A)}^p = \mathcal{L}^p(A).$$

Demonstraţia este o adaptare imediată a celei din cazul $p = 1$ (vezi teorema 3.3.10) şi o lăsăm în seama cititorului.

4.2.5 Observaţie. Dacă mulţimea A este compactă atunci $C_p(A) = C(A)$ şi deci, în acest caz, $C(A)$ este densă în $\mathcal{L}^p(A)$.

Încheiem acest paragraf cu o proprietate importantă a spaţiilor $\mathcal{L}^p([a,b])$ - proprietatea de separabilitate.

4.2.6 Teoremă. *Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi oricare ar fi $p \geq 1$, spaţiul $\mathcal{L}^p([a,b])$ este separabil (conţine o submulţime numărabilă şi densă).*

Demonstraţie. Să notăm cu P mulţimea restricţiilor polinoamelor cu coeficienţi raţionali la intervalul $[a,b]$; P este o mulţime numărabilă.

Să arătăm că P este densă în $\mathcal{L}^p(A)$ deci că $\overline{P}^p = \mathcal{L}^p([a,b])$.

Pe de o parte, $P \subseteq C([a,b])$ şi deci, din teorema 4.2.4 şi obsevaţia care o urmează, $\overline{P}^p \subseteq \overline{C([a,b])}^p = \mathcal{L}^p([a,b])$.

Pe de altă parte, folosind aceaşi teoremă 4.2.4, $\forall f \in \mathcal{L}^p([a,b]), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C([a,b])$ a.î. $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ne vom reaminti acum de teorema lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue cu polinoame. În baza acesteia, există un polinom h pe $[a,b]$ a.î.

$$\|g - h\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Este evident, datorită densităţii mulţimii numerelor raţionale în $\mathbb{R}$, că putem aproxima uniform h cu polinoame din P. Deci $\exists l \in P$ a.î.

$$\|h - l\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Rezultă că

$$||f - l||_p \leq ||f - g||_p + ||g - h||_p + ||h - l||_p < \frac{\varepsilon}{3} + (b-a)^{\frac{1}{p}}||g - h||_\infty +$$

$$+(b-a)^{\frac{1}{p}}||h - l||_\infty < \frac{\varepsilon}{3} + 2(b-a)^{\frac{1}{p}}\frac{\varepsilon}{3(b-a)^{\frac{1}{p}}} = \varepsilon.$$

Deci $\forall\varepsilon > 0, \exists l \in P$ a.î. $||f - l||_p < \varepsilon$; rezultă că $f \in \overline{P}^p$, ceea ce arată că P este densă în $\mathcal{L}^p([a,b]), \|| \cdot \|_p)$. ∎

4.3 Spaţiul L^∞

4.3.1 Definiţie. Fie $A \in \mathcal{L}$ şi $f \in \mathcal{L}(A)$; definim

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ : |f| \leq \alpha \text{ a.p.t.}\} \in [0, +\infty].$$

$\|f\|_\infty$ se numeşte **supremumul esenţial** al funcţiei $|f|$.

4.3.2 Observaţii. (i) $|f| \leq \alpha$ a.p.t. înseamnă că $\lambda(|f| > \alpha) = 0$.

Dacă, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda(|f| > \alpha) > 0$ atunci singurul $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pentru care $|f| \leq \alpha$ a.p.t. este $\alpha = +\infty$ şi deci $\|f\|_\infty = +\infty$.

Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}_+$ a.î. $\lambda(|f| > \alpha) = 0$ atunci $\|f\|_\infty < +\infty$.

(ii) În general esenţial supremumul unei funcţii f este mai mic decât supremumul lui $|f|$:

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Într-adevăr, dacă $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, atunci $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = 1$ iar $\|f\|_\infty = 0$ ($\lambda(|f| > 0) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$; deci $|f| \leq \underline{0}$ a.p.t.).

(iii) Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : J \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe J; atunci $\|f\|_\infty = \sup_{x\in J} |f(x)|$. Într-adevăr, aşa cum am văzut la punctul precedent, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in J} |f(x)|$. Oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ a.î. $c < \sup_{x\in J} |f(x)|$ atunci există $x_0 \in J$ a.î. $c < |f(x_0)|$. Din continuitatea lui $|f|$ în x_0, există $\delta > 0$ a.î. $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap J \subseteq (|f| > c)$ şi deci $0 < \lambda((x_0-\delta, x_0+\delta)\cap J) \leq \lambda(|f| > c)$ deci $c \leq \|f\|_\infty$; rezultă că $\sup_{x\in J} |f(x)| \leq \|f\|_\infty$.

4.3.3 Lemă. *Fie $f \in \mathcal{L}(A)$; atunci:*

1). $\|f\|_\infty = \inf\{\sup_{x\in A\setminus N} |f(x)| : N \in \mathcal{L}, \lambda(N) = 0\}$.

2). $|f| \leq \|f\|_\infty$ *a.p.t.*

Demonstraţie. Să notăm $\alpha_0 = \inf\{\sup_{x\in A\setminus N} |f(x)| : N \in \mathcal{L}, \lambda(N) = 0\}$ şi să observăm că $\alpha_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $|f| \leq \alpha$ a.p.t., notăm cu $N = (|f| > \alpha) \in \mathcal{L}$; atunci $\lambda(N) = 0$. Din definiţia lui α_0, $\alpha_0 \leq \sup_{x\in A\setminus N} |f(x)| \leq \alpha$. Rezultă de aici că $\alpha_0 \leq \|f\|_\infty$.

Dacă $\alpha_0 = +\infty$, atunci egalitatea este evidentă.

Să presupunem că $\alpha_0 < +\infty$; utilizând definiţia lui α_0, $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(N) = 0$ a.î. $\alpha_0 + \varepsilon > \sup_{x\in A\setminus N} |f(x)|$. Rezultă că $|f(x)| < \alpha_0 + \varepsilon, \forall x \in A \setminus N$ sau $(|f| > \alpha_0 + \varepsilon) \subseteq N$ şi deci $|f| \leq \alpha_0 + \varepsilon$ a.p.t. Ţinând cont de semnificaţia esenţial supremumului lui f, $\|f\|_\infty \leq \alpha_0 + \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$ şi deci $\|f\|_\infty \leq \alpha_0$.

Cele două inegalităţi arată că $\|f\|_\infty = \alpha_0$.

2). Dacă $\|f\|_\infty = +\infty$, atunci inegalitatea este evidentă.

Să presupunem că $\|f\|_\infty < +\infty$; ţinând cont de punctul precedent, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists N_n \in \mathcal{L}$ cu $\lambda(N_n) = 0$ a.î.

$$\sup_{x \in A \setminus N_n} |f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

Fie $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n \in \mathcal{L}$; atunci $\lambda(N) = 0$ şi

$$|f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n}, \forall x \in A \setminus N = \bigcap_{n=1}^\infty (A \setminus N_n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate obţinem $|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \forall x \in A \setminus N$ sau $|f| \leq \|f\|_\infty$ a.p.t. ∎

4.3.4 Observaţie. Din punctul 2) al lemei precedente rezultă că $\|f\|_\infty$ este cel mai mic element al mulţimii $\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ : |f| \leq \alpha \text{ a.p.t.}\}$; deoarece această ultimă mulţime este un interval, $\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ : |f| \leq \alpha \text{ a.p.t.}\} = [\|f\|_\infty, +\infty]$.

4.3.5 Definiţie. Oricare ar fi $A \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^\infty(A) = \{f \in \mathcal{L}(A) : \|f\|_\infty < +\infty\}$.

4.3.6 Teoremă. *Faţă de operaţiile obişnuite de adunare a funcţiilor şi de înmulţire cu scalari, $\mathcal{L}^\infty(A)$ este spaţiu vectorial real iar $\|\cdot\|_\infty$ este o seminormă pe $\mathcal{L}^\infty(A)$.*

Demonstraţie. Fie $f, g \in \mathcal{L}^\infty(A)$; atunci $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ a.p.t. Deci $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < +\infty$; rezultă că $f+g \in \mathcal{L}^\infty(A)$ şi că $\|\cdot\|_\infty$ verifică inegalitatea triunghiulară.

Oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^\infty(A)$ şi pentru oricare $c \in \mathbb{R}$, $|c \cdot f| = |c| \cdot |f| \leq |c| \cdot \|f\|_\infty$ a.p.t. de unde

$$(*) \qquad \|c \cdot f\|_\infty \leq |c| \cdot \|f\|_\infty < +\infty.$$

Deci $c \cdot f \in \mathcal{L}^\infty(A)$.

Dacă $c = 0$ atunci evident $\|c \cdot f\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$.

Dacă $c \neq 0$ atunci aplicăm inegalitatea din $(*)$ pentru $\frac{1}{c} \in \mathbb{R}$ şi $c \cdot f \in \mathcal{L}^\infty(A)$:

$$\left\| \frac{1}{c} \cdot (c \cdot f) \right\|_\infty \leq \frac{1}{|c|} \cdot \|c \cdot f\|_\infty.$$

Deci $|c| \cdot \|f\|_\infty \leq \|c \cdot f\|_\infty$ care, împreună cu inegalitatea $(*)$, conduce la egalitatea $\|c \cdot f\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$.

Rezultă că $\|\cdot\|_\infty$ este o seminormă pe $\mathcal{L}^\infty(A)$. ∎

4.3.7 Observaţie. Relaţia $\sim$ definită prin $f \sim g \iff f = g$ a.p.t. este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{L}^\infty(A)$. Vom nota spaţiul cât $\mathcal{L}^\infty(A)|_\sim$ cu $L^\infty(A)$ şi, oricare ar fi $[f] \in L^\infty(A)$, $\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$. Folosind lema 4.3.3, $\|f\|_\infty = 0 \iff f = \underline{0}$ a.p.t. ; rezultă că definiţia precedentă nu depinde de reprezentantul f din clasa de echivalenţă $[f]$. Se poate uşor demonstra că $(L^\infty(A), \|\cdot\|_\infty)$ este un spaţiu normat.

4.3.8 Propoziţie. *Fie $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^\infty(A)$ şi $f \in \mathcal{L}^\infty(A)$.*

(1) $$f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_\infty} f \iff \exists B \in \mathcal{L}(A) \text{ cu } \lambda(B) = 0 \text{ a.î. } f_n \xrightarrow[A\setminus B]{\mathrm{u}} f.$$

(2) *$(f_n)_n$ este şir Cauchy în $(\mathcal{L}^\infty(A), \|\cdot\|_\infty) \iff \exists B \in \mathcal{L}(A)$ cu $\lambda(B) = 0$*

a.î. $(f_n)_n$ este şir Cauchy uniform pe $A \setminus B$.

Demonstraţie. (1) Presupunem că $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_\infty} f$; oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ există $n_p \in \mathbb{N}$ a.î. $\|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{p}$, pentru orice $n \geq n_p$. Din lema 4.3.3 rezultă că $|f_n - f| < \frac{1}{p}$ a.p.t. sau că, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ şi $n \geq n_p$, mulţimile $A_{n,p} = \left(|f_n - f| \geq \dfrac{1}{p}\right)$ sunt neglijabile. Atunci şi mulţimea $B = \bigcup_{p=1}^\infty \bigcup_{n=n_p}^\infty A_{n,p}$ este neglijabilă.

Oricare ar fi $x \in A \setminus B = \bigcap_{p=1}^\infty \bigcap_{n=n_p}^\infty (A \setminus A_{n,p})$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{p}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_p$ de unde $f_n \xrightarrow[A\setminus B]{\mathrm{u}} f$.

Reciproc, dacă presupunem că există $B \in \mathcal{L}(A)$ cu $\lambda(B) = 0$ a.î. $f_n \xrightarrow[A\setminus B]{\mathrm{u}} f$ atunci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î., oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi oricare ar fi $x \in A \setminus B$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Rezultă că $A \setminus B \subseteq (|f_n - f| < \varepsilon)$ ceea ce antrenează prin complementariere că $(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subseteq B$ şi deci că $|f_n - f| < \varepsilon$ a.p.t. Deci $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ de unde $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_\infty} f$.

(2) se demonstrează urmând aceeaşi cale. ∎

4.3.9 Teoremă. *$(\mathcal{L}^\infty(A), \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu seminormat complet şi deci $(L^\infty(A), \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Fie $(f_n)_n \subseteq (\mathcal{L}^\infty(A), \|\cdot\|_\infty)$ un şir Cauchy. Conform punctului (2) din propoziţia precedentă, există $B \in \mathcal{L}(A)$ cu $\lambda(B) = 0$ a.î.

$(f_n)_n$ este şir Cauchy uniform pe $A \setminus B$; aceasta înseamnă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î., oricare ar fi $m, n \geq n_\varepsilon$,

$$(*) \qquad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in A \setminus B.$$

Din $(*)$, pentru orice $x \in A \setminus B$, $(f_n(x))_n$ este şir Cauchy în $\mathbb{R}$ şi deci există $\lim_n f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Definim $f : A \to \mathbb{R}$ prin $f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x), & x \in A \setminus B, \\ 0, & x \in B. \end{cases}$

Şirul $(f_n)_n$ converge a.p.t. la f şi astfel, conform punctului 3) al teoremei 2.1.6, $f \in \mathcal{L}(A)$.

În $(*)$ facem $m \to \infty$ şi $n = n_\varepsilon$ şi obţinem $|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in A \setminus B$; rezultă că $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon + |f_{n_\varepsilon}(x)|, \forall x \in A \setminus B$, de unde $|f| \leq \varepsilon + |f_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_\infty$ a.p.t. Rezultă că $\|f\|_\infty < +\infty$ şi astfel $f \in \mathcal{L}^\infty(A)$.

Utilizăm încă o dată relaţia $(*)$ în care facem $n \to \infty$ şi obţinem $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in A \setminus B$ şi, deoarece $\lambda(B) = 0$, aceasta înseamnă că $|f_m - f| \leq \varepsilon$ a.p.t. sau $\|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon$; deci $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_\infty} f$. ∎

Propoziţia următoare este o extensie a inegalităţii lui Hölder (teorema 4.1.4).

4.3.10 Propoziţie. *Oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $g \in \mathcal{L}^\infty(A)$, funcţia $f \cdot g$ este integrabilă ($f \cdot g \in \mathcal{L}^1(A)$) şi are loc inegalitatea:*

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_A |f \cdot g| d\lambda \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

Demonstraţie. Din lema 4.3.3, $|g| \leq \|g\|_\infty$ a.p.t. şi deci, aproape peste tot, $|f \cdot g| \leq \|g\|_\infty \cdot |f|$. Rezultă atunci din teorema de dominare (teorema 3.2.6) că $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(A)$ şi integrând inegalitatea de mai sus obţinem extensia inegalităţii lui Hölder din enunţul propoziţiei. ∎

În cazul în care măsura lui A este finită putem să comparăm între ele spaţiile $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$ (vezi şi teorema 4.1.12).

4.3.11 Teoremă (teorema lui Riesz). *Dacă $\lambda(A) < +\infty$ atunci $\mathcal{L}^\infty(A) \subsetneq \bigcap_{p=1}^\infty \mathcal{L}^p(A)$ şi, oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^\infty(A)$,*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p.$$

Demonstraţie. Fie $p \geq 1$ arbitrar; $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(A), f \in \mathcal{L}(A)$ şi, din lema 4.3.3, $|f| \leq \|f\|_\infty$ a.p.t., de unde:

$$|f|^p \leq ||f||_\infty^p \text{ a.p.t.} \tag{1}$$

Dar în spaţii de măsură finită funcţiile constante sunt integrabile. Deci $\underline{\|f\|_\infty^p} \in \mathcal{L}^1(A)$ ($\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$) şi atunci, conform teoremei de dominare (teorema 3.2.6), $|f|^p \in \mathcal{L}^1(A)$. Rezultă că $f \in \mathcal{L}^p(A)$ ceea ce demonstrează incluziunea $\mathcal{L}^\infty(A) \subset \bigcap_{p=1}^\infty \mathcal{L}^p(A)$.

Acum integrăm în inegalitatea (1) şi obţinem:

$$\int_A |f|^p d\lambda \leq \|f\|_\infty^p \cdot \lambda(A),$$

de unde

$$\|f\|_p \leq [\lambda(A)]^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{L}^\infty(A). \tag{2}$$

De aici rezultă că urma topologiei generate pe $\mathcal{L}^\infty(A)$ de seminorma $\|\cdot\|_p$ este mai puţin fină decât topologia generată pe $\mathcal{L}^\infty(A)$ de seminorma $\|\cdot\|_\infty$.

Am observat că inegalitatea (2) are loc $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(A)$ şi $\forall p \geq 1$; dacă trecem la limită superioară în această inegalitate obţinem că

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{L}^\infty(A). \tag{3}$$

În cele de mai sus am presupus că $\lambda(A) > 0$; în cazul particular în care $\lambda(A) = 0$, rezultă, din faptul că λ este măsură completă, că, $\forall p \geq 1, \mathcal{L}^1(A) = \mathcal{L}^p(A) = \mathcal{L}^\infty(A) = \mathcal{L}(A)$, iar $\|f\|_p = 0 = \|f\|_\infty, \forall p \geq 1$. În această situaţie este evident că $\lim_p \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Revenind la inegalitatea (3), dacă $\|f\|_\infty = 0$, atunci, din (3), rezultă că există $\lim_p \|f\|_p = 0 = \|f\|_\infty$.

Să presupunem acum că $\|f\|_\infty > 0$.

$\forall \alpha < \|f\|_\infty$, rezultă, din definiţia $\|f\|_\infty$, că $\lambda(|f| > \alpha) > 0$; fie $A_\alpha = (|f| > \alpha) \in \mathcal{L}(A)$. Obţinem, $\forall p \geq 1$:

$$\|f\|_p \geq \left(\int_{A_\alpha} |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \geq [\alpha^p \cdot \lambda(A_\alpha)]^{\frac{1}{p}} = \alpha \cdot [\lambda(A_\alpha)]^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Deoarece $\lambda(A_\alpha) \in (0, +\infty), \exists \lim_{p\to+\infty} [\lambda(A_\alpha)]^{\frac{1}{p}} = 1$. Dacă în relaţia (4) trecem la limită inferioară după $p \to \infty$, obţinem:

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \alpha, \forall \alpha < \|f\|_\infty. \tag{5}$$

Dar (5) implică

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p. \tag{6}$$

Din (3) şi (6) rezultă că există $\lim_p \|f\|_p = \|f\|_\infty$ ∎

4.3.12 Observaţie. În enunţul teoremei lui Riesz am precizat că incluziunea $\mathcal{L}^\infty(A) \subsetneq \bigcap_{p=1}^\infty \mathcal{L}^p(A)$ este strictă. Într-adevăr, dacă considerăm funcţia $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln x$ atunci, conform punctului (iii) al observaţiei 4.3.2, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in(0,1]}|f(x)| = +\infty$. Deci $f\notin\mathcal{L}^\infty((0,1])$. Pe de altă parte, oricare ar fi $p\geq 1$, $\|f\|_p^p = \int_{(0,1]}|f|^p d\lambda = \int_{0+0}^1 |\ln x|^p dx < +\infty$ (există $\beta=\frac{1}{2}$ şi există $\lim_{x\downarrow 0} x^\beta\cdot|\ln x|^p = 0 < +\infty$; conform criteriului în β de convergenţă a integralelor generalizate de specia a doua integrala noastră este convergentă). Rezultă că $f\in\mathcal{L}^p((0,1])$, oricare ar fi $p\geq 1$.

4.4 Serii Fourier în $L^2([-\pi,\pi])$

În acest paragraf vom studia convergenţa în medie a seriilor Fourier în $L^2([-\pi,\pi])$. Facem de la început observaţia că multe dintre rezultatele acestui capitol rămân adevărate dacă înlocuim intervalul închis $[-\pi,\pi]$ cu o mulţime măsurabilă arbitrară.

Să ne reamintim că spaţiul $L^2([-\pi,\pi])$ este un spaţiu Banach în raport cu normă $\|\cdot\|_2 : L^2[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}_+$ definită prin $\|f\|_2 = \left(\int_{[-\pi,\pi]} f^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$, oricare ar fi $f\in L^2([-\pi,\pi])$ (vezi teorema 4.2.2 şi punctul (i) al observaţiei 4.2.3). (Deoarece integrala Lebesgue nu depinde de schimbarea valorilor unei funcţii pe o mulţime de măsură nulă vom utiliza curent în locul claselor de echivalenţă din $L^2([-\pi,\pi]) = \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])|_\sim$ reprezentanţi ai acestora.)

În plus teorema 4.2.6 ne asigură că spaţiul $(L^2([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$ este un spaţiu Banach separabil.

Să observăm că, deoarece $p=q=\frac{1}{2}$ sunt numere conjugate, inegalitatea lui Hölder ne spune că, $\forall f,g\in L^2([-\pi,\pi]), f\cdot g\in L^1([-\pi,\pi])$ şi $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\cdot\|g\|_2$ (vezi teorema 4.1.4). Putem atunci defini aplicaţia $(\cdot,\cdot): L^2([-\pi,\pi])\times L^2([-\pi,\pi])\to\mathbb{R}$ prin

$$(f,g) = \int_{[-\pi,\pi]} fg d\lambda.$$

Demonstraţia următoarei propoziţii este o simplă aplicare a definiţiei de mai sus.

4.4.1 Propoziţie. *Aplicaţia* $(\cdot,\cdot)$ *definită mai sus este un produs interior pe* $L^2([-\pi,\pi])$ *adică verifică condiţiile:*
1). $(f,f) \geq 0, \forall f \in L^2([-\pi,\pi])$ *şi* $(f,f) = 0 \Longleftrightarrow f = \underline{0}$ *a.p.t.*
2). $(f,g) = (g,f), \forall f,g \in L^2([-\pi,\pi])$.
3). $(f+g,h) = (f,h) + (g,h), \forall f,g,h \in L^2([-\pi,\pi])$.
4). $(c \cdot f,g) = c \cdot (f,g), \forall f,g \in L^2([-\pi,\pi]), \forall c \in \mathbb{R}$.

Norma indusă de acest produs interior se defineşte în mod standard prin $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$; se observă imediat că $\|f\| = \|f\|_2, \forall f \in L^2([-\pi,\pi])$. Spaţiul $L^2([-\pi,\pi])$ este astfel un spaţiu Hilbert separabil (un spaţiu Banach separabil a cărui normă este indusă de un produs interior).

În astfel de spaţii se poate introduce noţiunea de ortogonalitate: doi vectori $f,g \in L^2([-\pi,\pi])$ se numesc **ortogonali** sau **perpendiculari** dacă $(f,g) = 0$; vom nota aceasta cu $f \perp g$.

Un şir $(f_n)_n \subseteq L^2([-\pi,\pi])$ se numeşte **ortogonal** dacă $f_n \perp f_m, \forall m \neq n$; dacă, în plus, $\|f_n\|_2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, şirul se numeşte **ortonormat**.

Un rezultat general de analiză funcţională ne asigură că în orice spaţiu Hilbert separabil există şiruri ortonormate şi orice element al spaţiului se exprimă ca sumă a unei serii construită cu elementele unui asemenea şir (vezi, de exemplu, teorema 2.10.33 din [3]).

În cele ce urmează vom pune în evidenţă şir ortonormat important în $L^2([-\pi,\pi])$ - sistemul trigonometric.

4.4.2 Definiţie. Definim, $\forall n \in \mathbb{N}$, funcţiile $f_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ astfel:

$$\begin{array}{lcllll} f_0(x) & = & 1 & , & \forall x \in [-\pi,\pi] & , \\ f_{2n-1}(x) & = & \cos nx & , & \forall x \in [-\pi,\pi] & , \quad \forall n \geq 1, \\ f_{2n}(x) & = & \sin nx & , & \forall x \in [-\pi,\pi] & , \quad \forall n \geq 1. \end{array}$$

Atunci şirul $(f_n)_n \subseteq C([-\pi,\pi]) \subseteq \mathcal{R}([-\pi,\pi]) \subseteq L^2([-\pi,\pi])$, se numeşte **sistemul trigonometric**.

Remarcăm că, $\forall x \in [-\pi,\pi]$,

$$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ...)\,.$$

4.4.3 Propoziţie. *Sistemul trigonometric este un sistem ortogonal de vectori în* $L^2([-\pi,\pi])$*:*

$$f_n \perp f_m, \forall n \neq m \text{ şi } \|f_0\|_2 = \sqrt{2\pi}, \|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}, \forall n \geq 1.$$

Demonstraţie. Să arătăm că $(f_n, f_m) = 0, \forall n \neq m$.
Deoarece $(f_n)_n \subseteq C([-\pi,\pi])$, rezultă că, $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$(f_n, f_m) = \int_{[-\pi,\pi]} f_n f_m d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) f_m(x) dx.$$

$$(f_0, f_{2m-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx|_{-\pi}^{\pi} = 0, \forall m \geq 1.$$

$$(f_0, f_{2m}) \quad = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx|_{-\pi}^{\pi} = 0, \forall m \geq 1.$$

$$(f_{2n-1}, f_{2m-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0, \forall n, m \geq 1, n \neq m.$$

$$(f_{2n-1}, f_{2m}) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x - \sin(n-m)x] \, dx = 0, \forall n, m \geq 1.$$

$$(f_{2n}, f_{2m}) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\pi} [-\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = 0, \forall n, m \geq 1, n \neq m.$$

Rezultă că $f_n \perp f_m, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$.
$||f_n||_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f_n^2(x) dx}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi astfel

$$||f_0||_2 = \sqrt{2\pi},$$

$$||f_{2n-1}||_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{\pi},$$

$$||f_{2n}||_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{\pi}.$$

■

4.4.4 Definiţie. Sistemul $(e_n)_n$, unde, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, e_n = \frac{1}{\|f_n\|_2} \cdot f_n$, este un sistem ortonormat. Oricare ar fi $x \in [-\pi, \pi]$,

$$(e_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, ... \right).$$

Oricare ar fi $f \in L^2([-\pi, \pi])$ **coeficienţii Fourier** asociaţi lui f sunt definiţi prin $c_n = (f, e_n) = \frac{1}{\|f_n\|_2} \cdot (f, f_n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, iar **seria Fourier** asociată lui f şi sistemului trigonometric este, oricare ar fi $x \in [-\pi, \pi]$, :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot e_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot (f, f_0) + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [(f, f_{2n-1}) \cdot \cos nx + (f, f_{2n}) \cdot \sin nx].$$

Pentru a simplifica scrierea vom nota, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \cos nx d\lambda(x), b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \sin nx d\lambda(x).$$

Atunci seria Fourier asociată lui f este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

4.4.5 Teoremă. *Fie* $f \in L^2([-\pi, \pi])$ *şi fie* $(a_n)_n, (b_n)_n$ *şirurile definite mai sus prin* $a_n = \frac{1}{\pi}(f, f_{2n-1}), b_n = \frac{1}{\pi}(f, f_{2n})$*; vom nota cu*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-\pi, \pi].$$

($(S_n)_n$ *este şirul sumelor parţiale pentru seria Fourier asociată lui* f*).*

Oricare ar fi şirurile $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ *fie*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Atunci:

1). $\|f - S_n\|_2 \leq \|f - T_n\|_2, \forall n \in \mathbb{N}$,

2). $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{[-\pi,\pi]} f^2 d\lambda$,

3). $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Demonstraţie. T_n fiind un polinom trigonometric arbitrar de forma indicată,

$$(T_n, T_n) = \frac{\alpha_0^2}{4} \cdot (\underline{1}, \underline{1}) + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k^2 \cdot (\cos k\cdot, \cos k\cdot) + \beta_k^2 \cdot (\sin k\cdot, \sin k\cdot)] =$$

$$= \frac{\alpha_0^2}{4} \cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \cdot \pi = \left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right) \cdot \pi.$$

Atunci, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - T_n\|_2^2 = (f - T_n, f - T_n) = (f, f) - 2(f, T_n) + (T_n, T_n) =$$

$$= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k (f, f_{2k-1}) + \beta_k (f, f_{2k})] - \alpha_0 (f, f_0) + (T_n, T_n) =$$

$$= \|f\|_2^2 - \pi \alpha_0 a_0 - 2\pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) =$$

$$= \|f\|_2^2 + \frac{\pi}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] -$$

$$-\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

În particular, dacă în locul lui T_n punem S_n, obţinem:

$$(*) \qquad \|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Comparând cei doi membri ai relaţiei $(*)$ rezultă imediat inegalitatea de la 1).

Din ultima egalitate rezultă că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \cdot \|f\|_2^2 - \frac{1}{\pi} \cdot \|f - S_n\|_2^2 \le \frac{1}{\pi} \cdot \|f\|_2^2.$$

Dacă în inegalitatea de mai sus facem $n \to +\infty$ obţinem inegalitatea de la 2).

În sfârşit, din inegalitatea de la 2) rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ este convergentă; deci termenul general tinde la 0 şi aceasta conduce la 3). ∎

4.4.6 Observaţii. (i) Inegalitatea de la 1) arată că şirul sumelor parţiale pentru seria Fourier asociată lui f aproximează cel mai bine în normă f printre celelalte polinoame trigonometrice. Vom demonstra mai departe că de fapt acest şir converge în medie de ordin 2 la f.

(ii) Inegalitatea de la 2) se numeşte inegalitatea lui Bessel. Aşa cum vom arăta mai departe ea se va transforma de fapt în egalitate.

(iii) Condiţia de la 3) se mai poate scrie:

$$\lim_n \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos nx d\lambda(x) = 0 = \lim_n \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\sin nx d\lambda(x).$$

4.4.7 Lemă. *Fie* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale definit prin*

$$d_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t dt, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ *definim* $D_n(x,y) = \frac{1}{d_n}\cdot \cos^{2n}\frac{x-y}{2}$.

Atunci, $\forall r \in (0,\pi)$*:*

1). $\lim_n \int_{y-r}^{y+r} D_n(x,y)dx = 1$, *uniform după* $y \in [-\pi + r, \pi - r]$.

2). $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y)dx = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Observăm că, $\forall n \geq 1$,

$$d_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n-1} t(\sin t)' dt = \cos^{2n-1} t \sin t|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+(2n-1)\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n-2} t \sin^2 t dt = (2n-1)d_{n-1} - (2n-1)d_n.$$

Rezultă de aici următoarea relaţie de recurenţă:

$$d_n = \frac{2n-1}{2n} d_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Dăm valori lui n, în relaţia precedentă, de la 1 la un număr $m \in \mathbb{N}^*$, înmulţim relaţiile găsite şi obţinem:

$$d_m = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} d_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot 2\pi, \tag{1}$$

unde $(2m-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1)$ iar $(2m)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2m)$.

Observăm acum că, $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2m-2}{2m-1} < \frac{2m-1}{2m}. \tag{2}$$

În inegalitatea (2), dăm lui m valori de la 2 la un număr $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, arbitrar şi înmulţind relaţiile obţinem:

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} < 2 \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{3}$$

Amplificând inegalitatea (3) cu $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, rezultă:

$$\frac{1}{2n} < 2 \cdot \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2, \tag{4}$$

sau, echivalent:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}, \ \forall n \geq 2. \tag{5}$$

Din (1) şi (5) rezultă în final inegalitatea:

$$d_n \geq \frac{\pi}{\sqrt{n}}, \ \forall n \geq 2. \tag{6}$$

1). Fie acum, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{y-r}^{y+r} D_n(x,y)dx$. Facem schimbarea de variabilă $\frac{x-y}{2} = t$ şi obţinem:

$$I_n = \frac{2}{d_n}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \cos^{2n} t dt = \frac{4}{d_n}\int_0^{\frac{r}{2}} \cos^{2n} t dt = \frac{1}{d_n}\left[d_n - 4\cdot\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt\right] =$$

$$= 1 - \frac{4}{d_n}\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt.$$

Dar, din (6), rezultă:

$$\left|\frac{4}{d_n}\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt\right| \leq \frac{4}{d_n}\cos^{2n}\frac{r}{2} < \frac{4\sqrt{n}}{\pi}\cos^{2n}\frac{r}{2}.$$

Deoarece $\lim_n \sqrt{n}\left(\cos\frac{r}{2}\right)^{2n} = 0$, obţinem $I_n \to 0$ şi deci:

$$\lim_n \int_{y-r}^{y+r} D_n(x,y)dx = 1, \text{uniform după } y \in [-\pi + r, \pi - r].$$

2). Fie acum $n \in \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{R}$; atunci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y)dx = \frac{1}{d_n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{x-y}{2}dx = \frac{2}{d_n}\int_{-\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}} \cos^{2n} t dt.$$

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \cos^{2n} t, \forall t \in \mathbb{R}$, este o funcţie periodică cu perioada π. Rezultă că pe orice interval de lungime egală cu perioada integrala este aceeaşi şi astfel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y)dx = \frac{2}{d_n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = \frac{1}{d_n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t dt = 1. \blacksquare$$

4.4.8 Lemă (L. Fejér). *Fie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă; atunci,* $\forall [a,b] \subseteq (-\pi,\pi)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,\cdot)f(x)dx \xrightarrow[{[a,b]}]{\mathrm{u}} f.$$

Demonstraţie. Funcţia f este continuă pe $[-\pi,\pi]$; conform teoremei lui Weierstrass f este mărginită. Astfel, $\exists M \geq 1$ aşa fel încât:

$$(1) \qquad |f(x)| \leq M, \forall x \in [-\pi,\pi]$$

Funcţia f, fiind continuă pe intervalul închis şi mărginit $[-\pi,\pi]$, este funcţie uniform continuă (teorema lui Cantor). Rezultă că, $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0$ a.î.

$$(2) \qquad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4M}, \forall x,y \in [-\pi,\pi] \text{ cu } |x-y| < \delta.$$

Să considerăm $[a,b] \subseteq (-\pi,\pi)$ un interval arbitrar; putem alege numărul pozitiv δ din uniforma continuitate suficient de mic astfel încât $-\pi+\delta \leq a < b \leq \pi - \delta$ ($\delta \leq \min\{\pi+a, \pi-b\}$); atunci $\delta \in (0,\pi)$ şi, aplicând lema 4.4.7 cu $r = \delta$, rezultă că

$$\lim_n \int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y)dx = 1, \text{ uniform după } \ y \in [-\pi+\delta, \pi-\delta].$$

Deoarece $[a,b] \subseteq [-\pi+\delta,\pi-\delta], \lim_n \int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y)dx = 1$, unifom după $y \in [a,b]$. Deci $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$$(3) \qquad \left|\int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y)dx - 1\right| < \frac{\varepsilon}{4M}, \ \forall n \geq n_\varepsilon, \forall y \in [a,b].$$

De asemenea, din lema precedentă:

$$(4) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y)dx = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Atunci, $\forall y \in [a,b]$, $[y-\delta, y+\delta] \subseteq [-\pi,\pi]$ şi, folosind condiţiile (1)–(4), obţinem:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y) f(x) dx - f(y) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y) \left[f(x) - f(y) \right] dx \right| \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y) |f(x) - f(y)| dx = \int_{-\pi}^{y-\delta} D_n(x,y) \left(|f(x)| + |f(y)| \right) dx +$$

$$+ \int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y) |f(x) - f(y)| dx + \int_{y+\delta}^{\pi} D_n(x,y) \left(|f(x)| + |f(y)| \right) dx \le$$

$$\le 2M \int_{-\pi}^{y-\delta} D_n(x,y) dx + \frac{\varepsilon}{4M} \int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y) dx + 2M \int_{y+\delta}^{\pi} D_n(x,y) dx$$

$$= 2M \left(1 - \int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y) dx \right) + \frac{\varepsilon}{4M} \int_{y-\delta}^{y+\delta} D_n(x,y) dx <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4M} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (1+\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,\cdot) f(x) dx \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{u}} f$ ∎

Teoremă. $\forall f \in L^2([-\pi,\pi])$, *seria Fourier asociată lui f relativ la sistemul trigonometric converge în medie de ordin doi la f.*

Demonstraţie. $\forall f \in L^2([-\pi,\pi]), \forall n \ge 1, a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ (definiţia 4.4.2).

Fie $S_n = \frac{a_0}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k f_{2k-1} + b_k f_{2k} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să arătăm că $S_n \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{\|\cdot\|_2} f$.

Deoarece $\overline{C([a,b])}^{2} = L^2([-\pi,\pi])$ (vezi teorema 4.2.4), $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C([-\pi,\pi])$ a.î. $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. Funcţia g fiind continuă pe $[-\pi,\pi]$, $\exists M > 0$ a.î. $|g(x)| \le M, \forall x \in [-\pi,\pi]$.

Fie acum, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$,

$$T_n(y) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x,y) g(x) dx = \frac{1}{d_n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x-y}{2} g(x) dx.$$

Se observă că, $\forall y \in [-\pi,\pi], \forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(y) = \frac{1}{2^n d_n} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y + \sin x \sin y)^n g(x) dx.$$

Se poate demonstra uşor prin inducţie că, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, 1, ..., n$, $\exists c_k^n, d_k^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţii continue astfel încât

$$(1 + \cos x \cos y + \sin x \sin y)^n = \sum_{k=0}^{n} (c_k^n(x) \cos ky + d_k^n(x) \sin ky), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}$,

$$T_n(y) = \frac{1}{2^n d_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} c_k^n(x) g(x) dx \right) \cos ky +$$

$$+ \frac{1}{2^n d_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} d_k^n(x) g(x) dx \right) \sin ky.$$

Notând, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, 1, ..., n$,

$$\alpha_k^n = \frac{1}{2^n d_n} \int_{-\pi}^{\pi} c_k^n(x) g(x) dx \text{ şi } \beta_k^n = \frac{1}{2^n d_n} \int_{-\pi}^{\pi} d_k^n(x) g(x) dx,$$

rezultă că:

$$T_n = \alpha_0^n f_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^n f_{2k-1} + \beta_k^n f_{2k}).$$

Din punctul 1) al teoremei 4.4.5, ştim că, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(*) \qquad \|f - S_n\|_2 \le \|f - T_n\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - T_n\|_2.$$

Pe de altă parte, din lema 4.4.8, $\forall [a, b] \subseteq (-\pi, \pi)$, $T_n \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{u}} g$.

Rezultă atunci că $|g - T_n|^2 \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{\cdot} \underline{0}$.

Apoi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}$,
$|T_n(y)| \le \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x, y) |g(x)| dx \le M \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x, y) dx = M$ şi deci:

$$|T_n - g|^2 \le (|T_n| + |g|)^2 \le (M + M)^2 = 4M^2.$$

Putem astfel aplica şirului $\left(|T_n - g|^2\right)_{n \in \mathbb{N}}$ teorema convergenţei mărginite (corolarul 3.3.9); deci $\exists \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |T_n - g|^2 d\lambda = 0$. Altfel spus $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$.

Utilizând acum relaţia $(*)$, rezultă că $\limsup_n \|f - S_n\|_2 \le \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, de unde $S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$, ceea ce încheie demonstraţia. ∎

4.4.9 Corolar (egalitatea Parseval-Liapunov). *Fie $f \in L^2([-\pi,\pi])$ şi fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - coeficienţii Fourier ai funcţiei f relativ la sistemul trigonometric; atunci:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Demonstraţie. Din teorema precedentă, oricare ar fi $f \in L^2([-\pi,\pi])$, seria Fourier asociată lui f converge în medie de ordin doi la f. Rezultatul urmează trecând la limită în relaţia $(*)$ din teorema 4.4.5. ∎

4.4.10 Corolar. *1). Orice funcţie $f \in L^2([-\pi,\pi])$ care are toţi coeficienţii Fourier nuli este nulă a.p.t.*

2). Dacă două funcţii $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$ au aceiaşi coeficienţi Fourier, atunci $f = g$ a.p.t.

Demonstraţie. 1). Dacă $a_n = b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci seria Fourier asociată are şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nul.

Deoarece $S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f, S_n \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{\lambda} f$ (vezi 4.1.11); cum, pe de altă parte, $S_n \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{\lambda} \underline{0}$ rezultă că $f = \underline{0}$ a.p.t. (vezi punctul 1) al teoremei 2.2.4).

2). Dacă $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$ au aceiaşi coeficienţi Fourier, atunci $f - g$ are toţi coeficienţii nuli şi deci, conform punctului 1), $f - g = \underline{0}$ a.p.t. ∎

4.4.11 Exemple.

1). Fie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \text{sign}x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Evident $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Deoarece f este impară, $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx = \frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Egalitatea lui Parseval-Liapunov se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 2,$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

2). Fie funcţia $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$. Deoarece funcţia este pară, $b_n=0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\pi$ iar, $\forall n\geq 1, a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$.
Egalitatea Parseval-Liapunov se scrie:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

de unde rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}^2=\frac{\pi^2}{6} \text{ sau } \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ţinând cont că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

4.5 Exerciţii

1). Fie $f_n:(0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{n}{1+n\sqrt{x}}$. Arătaţi că:
a). $(f_n)\subseteq\mathcal{L}^2((0,1])$.
b). Există $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n(x)\to f(x), \forall x\in(0,1]$.
c). (f_n) nu converge în $\mathcal{L}^2((0,1])$ la f.
2). Fie f,g două funcţii integrabile Riemann pe $[a,b]$; să se arate că

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

3). Fie $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}), f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$; arătaţi că $\dfrac{1}{f}\notin\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
Indicaţie: Se aplică inegalitatea lui Hölder funcţiilor $f^{-\frac{1}{2}}, f^{\frac{1}{2}}$ pentru $p=q=\frac{1}{2}$.
4). Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ a.î. $\sqrt{f}\in\mathcal{L}^1([0,1])$; să se arate că

$$\int_{[0,1]}\sqrt{f}d\lambda\leq\sqrt{\int_{[0,1]}fd\lambda}.$$

5). Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot e^x}$.

Arătaţi că $f\in\mathcal{L}^1((0,+\infty))\setminus\mathcal{L}^2((0,+\infty))$.

6). Fie $(f_n)\subseteq\mathcal{L}^p(A)$ şi $f\in\mathcal{L}^p(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\cdot} f$.

Arătaţi că $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f \Longleftrightarrow \|f_n\|_p\to\|f\|_p$.

Indicaţie: Pentru implicaţia $\Longleftarrow$ se va arăta întâi că, $\forall a,b\in\mathbb{R}, \forall p\geq 1$, $|a+b|^p\leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$; apoi se va aplica lema lui Fatou şirului $g_n=2^{p-1}\left(|f|^p+|f_n|^p\right)-|f-f_n|^p$.

7). Fie $p>1, q=\dfrac{p}{p-1}$, $(f_n)_n\subseteq\mathcal{L}^p(A)$ şi $f\in\mathcal{L}^p(A)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_p} f$. Arătaţi că, oricare ar fi $g\in\mathcal{L}^q(A)$,

$$\int_A f_n\cdot g d\lambda \to \int_A f\cdot g d\lambda.$$

8). Fie şirul $(f_n)_n\subseteq\mathcal{E}_+(\mathbb{R})$ definit prin $f_n=\frac{1}{n}\cdot\chi_{[0,\,e^n]}$. Arătaţi că $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \underline{0}$ dar, oricare ar fi $p\geq 1$, $(f_n)_n$ nu converge în medie de ordin p la $\underline{0}$.

9). Să se demonstreze următoarele proprietăţi în $\mathcal{L}^2(A)$:

a). $|(f,g)|\leq\|f\|_2\cdot\|g\|_2, \forall f,g\in\mathcal{L}^2(A)$.

b). $f_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_2} f \Longrightarrow (f_n,g)\to(f,g), \forall (f_n)_n\subseteq\mathcal{L}^2(A), f,g\in\mathcal{L}^2(A)$.

c). $\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2\cdot(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2), \forall f,g\in\mathcal{L}^2(A)$.

d). $f\perp g_n, \forall n\in\mathbb{N}$ şi $g_n \xrightarrow[A]{\|\cdot\|_2} g \Longrightarrow f\perp g$.

10). Să se scrie egalitatea Parseval - Liapunov pentru funcţiile:

a). $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}-1, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x\in(0,\pi].\end{cases}$

b). $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$.

c). $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$.

d). $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\chi_{[0,\,\alpha]}, \alpha\in(0,\pi]$; cazul particular $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

11). Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ este convergentă punctual pe $[-\pi,\pi]$ dar ea nu poate fi seria Fourier asociată nici unei funcţii $f\in\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$.

Capitolul 5

Măsura în plan şi în spaţiu

Fie $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ şi $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$; cu operaţia de adunare şi înmulţire cu scalari reali (operaţii definite pe coordonate) aceste mulţimi se structurează ca spaţii vectoriale reale.

Aplicaţiile definite prin $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi respectiv $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sunt norme pe aceste spaţii, adică verifică proprietăţile:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ ($\underline{0} = (0, 0)$ sau $\underline{0} = (0, 0, 0)$).
2. $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|, \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2$ sau $x \in \mathbb{R}^3$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ sau $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Orice normă pe un spaţiu vectorial defineşte o metrică pe acest spaţiu. Astfel aplicaţia $(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ va fi o metrică pe $\mathbb{R}^2$ (respectiv pe $\mathbb{R}^3$); ea are următoarele proprietăţi:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ sau $x, y \in \mathbb{R}^3$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ sau $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

Fie $x \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ şi fie $r > 0$; mulţimea $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3) : d(x, y) < r\}$ se numeşte **sferă deschisă** de centru x şi rază r. Muţimea $T(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3) : d(x, y) \leq r\}$ se numeşte sferă închisă de centru x şi rază r.

5.1 Definiţia măsurii Lebesgue în $\mathbb{R}^2$ şi în $\mathbb{R}^3$

5.1.1 Definiţie. O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) este **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau dacă $D \neq \emptyset$ şi, oricare ar fi $x \in D$, există $r > 0$ a.î. $S(x, r) \subseteq D$.

O mulţime $F \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) este **închisă** dacă complementara sa F^c este deschisă.

Familia mulţimilor deschise se numeşte **topologia uzuală** a lui $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$); ea se notează cu τ_u^2 (τ_u^3). Familia mulţimilor închise se notează cu $\mathcal{F}^2$ ($\mathcal{F}^3$).

Următoarea propoziţie se demonstrează apelând la definiţia precedentă.

5.1.2 Propoziţie. *Topologia uzuală are următorele proprietăţi:*

(i) *Oricare ar fi* $D, G \in \tau_u^2$ $(\tau_u^3), D \cap G \in \tau_u^2$ (τ_u^3).

(ii) *Oricare ar fi* $\{D_i : i \in I\} \subseteq \tau_u^2$ $(\tau_u^3), \bigcup_{i\in I} D_i \in \tau_u^2$ (τ_u^3).

(iii) $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3) \in \tau_u^2$ $(\tau_u^3), \emptyset \in \tau_u^2$ (τ_u^3).

Familia mulţimilor închise are următorele proprietăţi duale:

(i') *Oricare ar fi* $F, H \in \mathcal{F}^2$ $(\mathcal{F}^3), F \cup H \in \mathcal{F}^2$ $(\mathcal{F}^3)$.

(ii') *Oricare ar fi* $\{F_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}^2$ $(\mathcal{F}^3), \bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}^2$ $(\mathcal{F}^3)$.

(iii') $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3) \in \mathcal{F}^2$ $(\mathcal{F}^3), \emptyset \in \mathcal{F}^2$ $(\mathcal{F}^3)$.

5.1.3 Definiţie. O mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este **vecinătate** pentru punctul $x \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ dacă există $r > 0$ a.î. $S(x, r) \subseteq V$. Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ familia tuturor vecinătăţilor lui x.

Un punct $x \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este **aderent** mulţimii $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ dacă orice vecinătate V a lui x întâlneşte A ($V \cap A \neq \emptyset$) sau, echivalent, dacă orice sferă deschisă $S(x, r)$ întâlneşte A. Notăm cu $\bar{A}$ mulţimea punctelor aderente ale lui A şi o numim **aderenţa** sau **închiderea** mulţimii A.

Un punct $x \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este **interior** mulţimii $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ dacă A este vecinătate a lui x. Notăm cu A° mulţimea punctelor interioare ale lui A şi o numim **interiorul** mulţimii A.

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este **mărginită** dacă există $r > 0$ a.î. $A \subseteq S(\underline{0}, r)$.

Un şir $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ **converge la** $x \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ dacă $\|x_n - x\| \to 0$.

O mulţime $K \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este **compactă** dacă este mărginită şi închisă.

5.1.4 Observaţii. (i) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A, x_n \to x$.

(ii) F este închisă dacă şi numai dacă $F = \bar{F}$.

(iii) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2, x_n = (x_1^n, x_2^n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi fie $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Atunci $x_n \to x \Leftrightarrow x_1^n \to x_1$ şi $x_2^n \to x_2$.

O caracterizare similară are loc şi pentru convergenţa în $\mathbb{R}^3$.

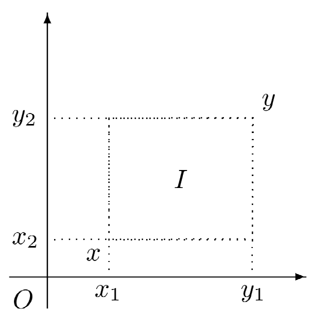
(iv) O mulţime $K \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este compactă dacă şi numai dacă orice şir de puncte din K are un subşir convergent la un punct din K.

(v) O mulţime $K \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ este compactă dacă şi numai dacă din orice acoperire a sa cu mulţimi deschise se poate extrage o subacoperire finită.

5.1.5 Definiţie. Fie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$; atunci $x \leq y$ dacă şi numai dacă $x_1 \leq y_1$ şi $x_2 \leq y_2$. Aceasta este o relaţie de parţială ordine pe $\mathbb{R}^2$ (nu orice două elemente din $\mathbb{R}^2$ pot fi comparate).

Dacă $x = (x_1, x_2) \leq y = (y_1, y_2)$ vom defini **intervalul deschis** bidimensional

$$I =]x, y[=]x_1, y_1[\times]x_2, y_2[= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < z_1 < y_1, x_2 < z_2 < y_2\}$$



În figura de mai sus se observă că intervalul I este interiorul unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate.

Vom nota cu $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$, sau cu $\mathcal{I}$ dacă nu este pericol de confuzie, familia intervalelor deschise; evident $\mathcal{I} \subseteq \tau_u^2$.

Se pot de asemenea defini **intervalele închise** $[x, y] = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2]$; orice interval închis este mulţime închisă.

Putem defini şi celelalte tipuri de intervale, marcate generic cu $J = |x, y| = |x_1, y_1| \times |x_2, y_2|$ (bara verticală poate fi o paranteză închisă sau una deschisă). Vom nota cu $\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, sau cu $\mathcal{J}$ dacă nu este pericol de confuzie, familia tuturor intervalelor din $\mathbb{R}^2$.

În plan vom considera numai intervale bidimensionale mărginite !

Pentru orice interval $J = |x, y| = |x_1, y_1| \times |x_2, y_2| \in \mathcal{J}$ vom spune că $|J| = (y_1 - x_1) \cdot (y_2 - x_2)$ este **măsura** sa; $|J|$ este aria dreptunghiului J.

Oricare ar fi $J = |x_1, y_1| \times |x_2, y_2| \in \mathcal{J}$ şi oricare ar fi $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $z + J = |x_1 + z_1, y_1 + z_1| \times |x_2 + z_2, y_2 + z_2| \in \mathcal{J}$ este translatul lui J cu z; este evident că $|z + J| = |J|$.

În $\mathbb{R}^3$ se defineşte similar o relaţie de parţială ordine. De asemenea se pot defini intervalele tridimensionale (acestea vor fi paralelipipede cu muchiile paralele cu axele de coordonate). Măsura unui astfel de interval va fi volumul paralelipipedului. Observăm de asemenea că translatul unui interval este tot un interval de acelaşi tip şi că măsura este invariantă la translaţii.

În cele ce urmează vom prezenta construcţia măsurii Lebesgue în $\mathbb{R}^2$; noţiunile şi rezultatele se pot adapta cu uşurinţă pentru $\mathbb{R}^3$.

Metoda de construcţie a măsurii pe $\mathbb{R}^2$ urmează aceeaşi paşi ca în cazul lui $\mathbb{R}$: se va defini măsura mulţimilor deschise, se va construi apoi măsura exterioară în plan şi se vor defini mulţimile măsurabile Lebesgue în $\mathbb{R}^2$.

Să ne reamintim că, în definiţia măsurii mulţimilor deschise în $\mathbb{R}$, un rol principal l-a jucat teorema de structură a mulţimilor deschise: orice mulţime deschisă din $(\mathbb{R}, \tau_u)$ se scrie unic ca o reuniune de intervale deschise disjuncte (teorema 1.1.3).

În $\mathbb{R}^2$ nu mai avem o asemenea reprezentare; totuşi putem da o teoremă de reprezentare a mulţimilor deschise ca reuniuni de intervale (bidimensionale) închise fără puncte interioare comune (o teoremă similară am dat şi în cazul lui $\mathbb{R}$, teorema 1.1.8).

Pentru a putea demonstra un astfel de rezultat avem nevoie de câteva leme ajutătoare.

5.1.6 Lemă. *Fie $J_1, J_2, ..., J_n \in \mathcal{J}$ aşa fel încât $J = \bigcup_{k=1}^{n} J_k \in \mathcal{J}$ şi $J_k^\circ \cap J_l^\circ = \emptyset$, oricare ar fi $k \neq l$; atunci $|J| = \sum_{k=1}^{n} |J_k|$.*

Demonstraţie. Fie $J_1, J_2, ..., J_n \in \mathcal{J}$ intervale bidimensionale arbitrare cu interioare disjuncte două câte două aşa fel încât reuniunea lor, J, este tot interval. Oricare ar fi $k \in \{1, ..., n\}$, prelungim laturile dreptunghiului J_k până la frontiera lui J. Obţinem astfel o nouă împărţire a lui J în dreptunghiuri $K_1, ..., K_m$ şi o partiţie $N_1, ..., N_n$ a mulţimii $\{1, ..., m\}$ a.î. $J_k = \cup_{i \in N_k} K_i$. Să presupunem că $J = |a, b| \times |c, d|$; punctele de intersecţie ale prelungirilor laturilor intervalelor cu laturile lui J vor determina două divizări $a = a_0 < a_1 < ... < a_p = b$ şi $c = c_0 < c_1 < ... < c_q = d$ $(m = p \cdot q)$. Atunci

$$|J| = (b - a) \cdot (d - c) = (b - a) \cdot \sum_{j=0}^{q-1} (c_{j+1} - c_j) =$$

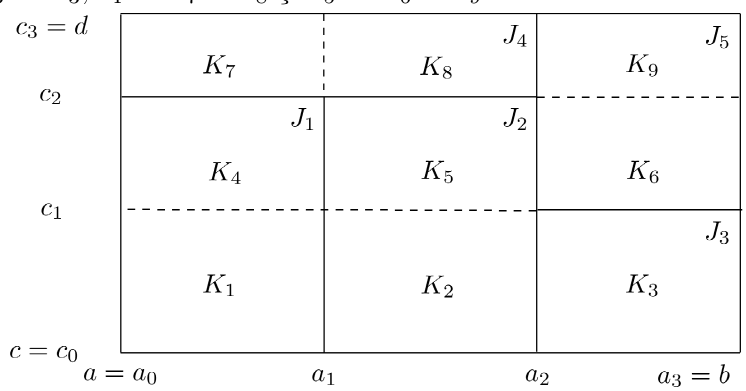
$$= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (c_{j+1} - c_j) = \sum_{l=1}^{m} |K_l|.$$

În mod asemănător se arată că, oricare ar fi $k \in \{1, ..., n\}$, $|J_k| = \sum_{i \in N_k} |K_i|$. Rezultă că

$$|J| = \sum_{l=1}^{m} |K_l| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in N_k} |K_i| = \sum_{k=1}^{n} |J_k|.$$ ∎

În figura de mai jos am imaginat un model posibil pentru situaţia din lema precedentă.

Intervalele delimitate de linii continue sunt intervalele J_k (dreptunghiul mare este J). Cu linii punctate au fost marcate prelungirile laturilor intervalelor J_k. Astfel $J = \cup_{k=1}^5 J_k$, $N_1 = \{1,4\}, N_2 = \{2,5\}, N_3 = \{3\}, N_4 = \{7,8\}, N_5 = \{9\}$.
Conform acestei partiţii a mulţimii $\{1,...,5\}$, $J_1 = K_1 \cup K_4, J_2 = K_2 \cup K_5, J_3 = K_3, J_4 = K_7 \cup K_8$ şi $J_5 = K_6 \cup K_9$.



5.1.7 Lemă. *Fie $J_1, ..., J_n \in \mathcal{J}$ a.î. $J = \bigcup_{k=1}^n J_k \in \mathcal{J}$; atunci*

$$|J| \leq \sum_{k=1}^n |J_k|$$

Demonstraţie. De această dată intervalele în discuţie nu mai au interioarele disjuncte două câte două. Procedăm la fel ca în demonstraţia lemei precedente prelungind laturile intervalelor J_k şi obţinem o nouă împărţire a lui J: $J = \bigcup_{l=1}^m K_l$ şi $\{N_1, ..., N_n\}$ o acoperire (şi nu partiţie !) a lui $\{1, ..., m\}$ a.î. $J_k = \bigcup_{i \in N_k} K_i$. Atunci

$$|J| = \sum_{l=1}^m |K_l| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i \in N_k} |K_i| = \sum_{k=1}^n |J_k|. \qquad \blacksquare$$

5.1.8 Lemă. *Fie $J_1, ..., J_n, K_1, ..., K_p \in \mathcal{J}$ a.î. $\bigcup_{i=1}^n J_i \subseteq \bigcup_{j=1}^p K_j$. Dacă $J_i^\circ \bigcap J_l^\circ = \emptyset$, oricare ar fi $i \neq l$, atunci*

$$\sum_{i=1}^n |J_i| \leq \sum_{j=1}^p |K_j|.$$

Demonstraţie. Fie $L_{ij} = J_i \bigcap K_j \in \mathcal{J}$; atunci, oricare ar fi $i \neq l$, L_{ij} şi L_{lj} nu au puncte interioare comune şi sunt incluse în K_j. Rezultă că $\sum_{i=1}^{n} |L_{ij}| \leq |K_j|$, oricare ar fi $j = 1, ..., p$, de unde

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} |L_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |L_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{p} |K_j|.$$

Dar $J_i = \bigcup_{j=1}^{p} L_{ij}$ şi atunci, din lema 5.1.7, $|J_i| \leq \sum_{j=1}^{p} |L_{ij}|$ de unde

$$\sum_{i=1}^{n} |J_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |L_{ij} \leq \sum_{j=1}^{p} |K_j|.$$ ∎

5.1.9 Lemă. *Fie $(J_n)_n$ şi $(K_p)_p$ două şiruri de intervale* **închise** *astfel încât $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$. Dacă $J_n^\circ \bigcap J_m^\circ = \emptyset$, oricare ar fi $n \neq m$, atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |K_m|.$$

Demonstraţie. Să presupunem că $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| > \sum_{m=1}^{\infty} |K_m|$. Atunci există $N \in \mathbb{N}$ şi $\varepsilon > 0$ a.î. $\sum_{n=1}^{N} |J_n| > \sum_{m=1}^{\infty} |K_m| + \varepsilon$. Oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, fie I_m un interval deschis a.î. $K_m \subseteq I_m$ şi $|I_m| < |K_m| + \dfrac{\varepsilon}{2^m}$.

Mulţimea $C = \bigcup_{n=1}^{N} J_n$ este compactă (mărginită şi închisă) şi $C \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$, deci $\{I_m : m \in \mathbb{N}^*\}$ formează o acoperire deschisă a muţimii compacte C; din această acoperire cu deschişi putem extrage o subacoperire finită. Rezultă că există $M \in \mathbb{N}^*$ a.î. $C \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} I_m$.

Atunci $\bigcup_{n=1}^{N} J_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} I_m$; putem atunci folosi lema 5.1.8 de unde rezultă că

$$\sum_{n=1}^{N} |J_n| \leq \sum_{m=1}^{M} |I_m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |I_m| < \sum_{m=1}^{\infty} |K_m| + \varepsilon,$$

ceea ce contrazice alegerea lui ε. ∎

5.1.10 Teoremă. *Orice mulţime deschisă şi nevidă $D \in \tau_u^2$ se poate reprezenta ca o reuniune a unui şir de intervale închise fără puncte interioare comune.*

Dacă $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, cu $J_n^\circ \cap J_p^\circ = \emptyset, \forall n \neq p$ şi $K_m^\circ \cap K_q^\circ = \emptyset, \forall m \neq q$, sunt două asemenea reprezentări atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{m=1}^{\infty} |K_m|.$$

Demonstraţie. Fie $D \in \tau_u^2, D \neq \emptyset$.

Pentru $n = 0$ considerăm reţeaua de drepte din plan paralele cu axele de coordonate ce trec prin punct întregi: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...; vom nota cu J_0 reuniunea pătratelor ‘inchise de latură 1 astfel create cara sunt incluse în D. Deci $J_0 \subseteq D$ şi $D \setminus J_0$ nu conţine pătrate de acestă formă.

Pentru $n = 1$ considerăm reţeaua de drepte paralele cu axele de coordonate care trec prin puncte de forma $\frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; fie J_1 reuniunea pătratelor închise create de latură $\frac{1}{2}$ care sunt incluse în D şi au interioare disjuncte de J_0.

La pasul n se consideră reţeaua de drepte paralele cu axele de coordonate care trec prin puncte de forma $\dfrac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}$; fie J_n reuniunea pătratelor închise de latură $\frac{1}{2^n}$ care sunt incluse în D şi care au interioare disjuncte de $\bigcup_{i=0}^{n-1} J_i$.

Vom continua această construcţie inductiv.

Atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ este o reuniune de pătrate închise cu interioare disjuncte ‘si $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq D$.

Oricare ar fi $x \in D$, există $\varepsilon > 0$ a.î. pătratul P cu centrul în x de latură 2ε este inclus în D; atunci există un cub închis de latură $\frac{1}{2^N}$ (obţinut în reţeaua $\frac{k}{2^N}$) ce conţine x şi este conţinut în P. Acest cub este sau conţinut în una dintre mulţimile $J_n, n < N$, sau este unul dintre cuburile ce constitue mulţimea J_N. Rezultă de aici că $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ ‘si deci $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$.

În cazul în care D admite două asemenea reprezentări $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, cu $J_n^\circ \cap J_p^\circ = \emptyset, \forall n \neq p$ şi $K_m^\circ \cap K_q^\circ = \emptyset, \forall m \neq q$, atunci, conform lemei 5.1.9, $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |K_m|$ şi $\sum_{m=1}^{\infty} |K_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$ de unde rezultă egalitatea cerută. ∎

5.1.11 Definiţie. Intervalele bidimensionale închise de forma

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right],$$

unde k, l sunt numere întregi şi $n \in \mathbb{N}$, se numesc intervale **diadice**.

Rezultă din demonstraţia teoremei 5.1.10 că orice mulţime deschisă nevidă se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale diadice fără puncte interioare comune.

5.1.12 Propoziţie. *Dacă două intervale diadice J_1 şi J_2 au un punct interior comun atunci $J_1 \subseteq J_2$ sau $J_2 \subseteq J_1$.*

Demonstraţie. Fie $n, m \in \mathbb{N}$ cu $n \leq m$, fie $k_1, l_1, k_2, l_2 \in \mathbb{Z}$ şi fie $J_1 = \left[\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{l_1}{2^n}, \frac{l_1+1}{2^n}\right]$ şi $J_2 = \left[\frac{k_2}{2^m}, \frac{k_2+1}{2^m}\right] \times \left[\frac{l_2}{2^m}, \frac{l_2+1}{2^m}\right]$ şi $x = (x_1, x_2) \in$

$J_1^\circ \cap J_2^\circ$.
Vom arăta că $J_2 \subseteq J_1$. Într-adevăr, din faptul că x este punct interior pentru ambele intervale rezultă că

$$\frac{k_2}{2^m} < x_1 < \frac{k_2+1}{2^m} \text{ şi } \frac{2^{m-n}\cdot k_1}{2^m} = \frac{k_1}{2^n} < x_1 < \frac{k_1+1}{2^n} = \frac{2^{m-n}\cdot k_1 + 2^{m-n}}{2^m}.$$

Rezultă că

$$k_2 < 2^{m-n}\cdot k_1 + 2^{m-n} \text{ şi } 2^{m-n}\cdot k_1 < k_2 + 1 \text{ sau}$$

$$k_2 + 1 \leq 2^{m-n}\cdot k_1 + 2^{m-n} \text{ şi } 2^{m-n}\cdot k_1 \leq k_2.$$

Oricare ar fi $y = (y_1, y_2) \in J_2$ rezultă din inegalităţile precedente

$$\frac{k_1}{2^n} = \frac{2^{m-n}\cdot k_1}{2^m} \leq \frac{k_2}{2^m} \leq y_1 \leq \frac{k_2+1}{2^m} \leq \frac{2^{m-n}\cdot k_1 + 2^{m-n}}{2^m} = \frac{k_1+1}{2^n}.$$

Cu un raţionament similar se arată că $\frac{l_1}{2^n} \leq y_2 \leq \frac{l_1+1}{2^n}$ de unde rezultă că $y \in J_1$. Deci $J_2 \subseteq J_1$.

Dacă $m \leq n$ se obţine $J_1 \subseteq J_2$. ■

Putem acum să dăm definiţia măsurii mulţimilor deschise în $\mathbb{R}^2$.

5.1.13 Definiţie. Fie $D \in \tau_u^2$; dacă $D = \emptyset$ atunci vom defini $\mu(D) = 0$. Dacă $D \neq \emptyset$ atunci, din teorema 5.1.10, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, unde J_n sunt intervale închise bidimensionale fără puncte interioare comune. Vom numi o astfel de scriere o **reprezentare** a mulţimii deschise D. Vom defini atunci $\mu(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$ şi o vom numi **măsura** mulţimii deschise D.

Definiţia este consistentă deoarece, utilizând din nou teorema 5.1.10, suma de mai sus nu depinde de reprezentarea mulţimii D ca reuniune numărabilă de intervale închise cu interioare disjuncte.

Am definit astfel o aplicaţie $\mu : \tau_u^2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$; în teorema următoare vom da câteva dintre proprietăţile măsurii mulţimilor deschise.

5.1.14 Teoremă.
1). $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\mathbb{R}^2) = +\infty$
2). $\mu(x + D) = \mu(D), \forall x \in \mathbb{R}, \forall D \in \tau_u^2$.
3). $\mu(D) \leq \mu(G), \forall D, G \in \tau_u^2$ *cu* $D \subseteq G$.
4). $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n), \forall (D_n)_n \subseteq \tau_u^2, D_n \cap D_m = \emptyset, \forall n \neq m$.
5). $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n), \forall (D_n)_n \subseteq \tau_u^2$.
6). $\mu(I) = |I|, \forall I \in \mathcal{I}$.

Demonstraţie. 1). $\mathbb{R}^2$ admite următoarea reprezentare ca reuniune de pătrate închise fără puncte interioare comune:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k,l\in\mathbb{Z}} [(k,l),(k+1,l+1)].$$

Rezultă că măsura lui $\mathbb{R}^2$ este o sumă infinită de 1 (aria acestor pătrate) şi deci este $+\infty$.

2). Dacă $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ atunci $x + D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x + J_n)$; observăm că, deoarece J_n sunt intervale închise fără puncte interioare comune la fel sunt şi intervalele $x+J_n$. Rezultă că $\mu(x+D) = \sum_{n=1}^{\infty} |x+J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \mu(D)$.

3). Fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ şi $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ reprezentări ale mulţimilor deschise D şi G. Deoarece $D \subseteq G$, putem utiliza lema 5.1.9 şi obţinem $\mu(D) = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |K_m| = \mu(G)$.

4). Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $D_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^n$ o reprezentare a mulţimii deschise D_n. Mulţimea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ este deschisă şi $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^n$ este o reprezentare a ei. Într-adevăr, J_k^n sunt intervale închise; două astfel de intervale distincte J_k^n şi J_l^m nu au puncte interioare comune deoarece, dacă $m \neq n$ atunci $J_k^n \cap J_l^m = \emptyset$ (sunt incluse în mulţimile disjuncte D_n şi D_m) iar dacă $m = n$ atunci $k \neq l$ şi deci, cum J_k^n şi J_l^n intră în reprezentarea lui D_n, nu au puncte interioare comune. Rezultă că

$$\mu(D) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |J_k^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n).$$

5). Fie $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ o reprezentare a mulţimii deschise $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $D_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^n$ o reprezentare a mulţimii deschise D_n. Deoarece $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^n$, putem folosi lema 5.1.9 şi obţinem:

$$\mu(D) = \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |J_k^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n).$$

6). Fie $I =]x,y[\in \mathcal{I} \subseteq \tau_u^2$ unde $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$; atunci $I =]x_1, y_1[\times]x_2, y_2[$. Să considerăm şirurile: $x_1^n \downarrow x_1, y_1^m \uparrow y_1$ a.î. $x_1^0 < y_1^0$ şi şirurile $x_2^p \downarrow x_2, y_2^q \uparrow y_2$ a.î. $x_2^0 < y_2^0$. Atunci intervalele deschise $]x_1, y_1[$ şi $]x_2, y_2[$ se pot scrie ca reuniuni numărabile de intervale închise:

$$]x_1, y_1[= [x_1^0, y_1^0] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_1^{n+1}, x_1^n] \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} [y_1^m, y_1^{m+1}] \text{ şi}$$

$$]x_2, y_2[= [x_2^0, y_2^0] \cup \bigcup_{p=0}^{\infty} [x_2^{p+1}, x_2^p] \cup \bigcup_{q=0}^{\infty} [y_2^q, y_2^{q+1}],$$

deci produsul lor cartezian va fi o reuniune numărabilă de intervale bidimensionale închise fără puncte interioare comune:

$$I = \big([x_1^0, y_1^0] \times [x_2^0, y_2^0]\big) \cup$$

$$\cup \bigcup_{p=0}^{\infty} \Big([x_1^0, y_1^0] \times [x_2^{p+1}, x_2^p]\Big) \cup \bigcup_{q=0}^{\infty} \Big([x_1^0, y_1^0] \times [y_2^q, y_2^{q+1}]\Big) \cup$$

$$\cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \big([x_1^{n+1}, x_1^n] \times [x_2^0, y_2^0]\big) \cup \bigcup_{n,p=0}^{\infty} \Big([x_1^{n+1}, x_1^n] \times [x_2^{p+1}, x_2^p]\Big) \cup$$

$$\cup \bigcup_{n,q=0}^{\infty} \Big([x_1^{n+1}, x_1^n] \times [y_2^q, y_2^{q+1}]\Big) \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} \big([y_1^m, y_1^{m+1}] \times [x_2^0, y_2^0]\big) \cup$$

$$\cup \bigcup_{m,p=0}^{\infty} \Big([y_1^m, y_1^{m+1}] \times [x_2^{p+1}, x_2^p]\Big) \cup \bigcup_{m,q=0}^{\infty} \Big([y_1^m, y_1^{m+1}] \times [y_2^q, y_2^{q+1}]\Big).$$

Aceasta fiind reprezentarea mulţimii deschise I, $\mu(I)$ va fi suma ariilor dreptunghiurilor închise componente. Dacă ţinem cont că

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_1^n - x_1^{n+1}) = x_1^0 - x_1, \sum_{m=0}^{\infty} (y_1^{m+1} - y_1^m) = y_1 - y_1^0,$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} (x_2^p - x_2^{p+1}) = x_2^0 - x_2 \text{ şi } \sum_{q=0}^{\infty} (y_2^{q+1} - y_2^q) = y_2 - y_2^0,$$

rezultă după un calcul simplu că

$$\mu(I) = (y_1 - x_1) \cdot (y_2 - x_2) = |I|.$$

■

Odată definită măsura pentru mulţimile deschise, vom proceda în continuare ca în cazul lui $\mathbb{R}$; vom defini măsura exterioară Lebesgue în plan şi apoi vom introduce şi studia mulţimile măsurabile şi măsura Lebesgue în plan. Deoarece demonstraţiile sunt identice ne vom limita la prezentarea principalelor definiţii şi rezultate privitoare la măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^2$.

5.1.15 Definiţie. Aplicaţia $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ definită prin

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(D) : D \in \tau_u^2, E \subseteq D\}, \forall E \subseteq \mathbb{R}^2,$$

se numeşte **măsura exterioară** Lebesgue în plan.

Măsura exterioară are următoarele proprietăţi:

5.1.16 Teoremă.

1). $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2). $E \subseteq F \Longrightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$,
3). $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n), \forall (E_n)_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

5.1.17 Observaţii. (i) $\mu^*(D) = \mu(D), \forall D \in \tau_u^2$.
(ii) $\mu^*(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$.
(iii) $\mu^*(J) = |J|, \forall J \in \mathcal{J}$.
(iv) $\mu^*(\bigcup_{k=1}^n E_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k), \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.
(v) $\mu^*(x + E) = \mu^*(E), \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall E \subseteq \mathbb{R}^2$.

5.1.18 Definiţie. O mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^2$ este **neglijabilă în sens Lebesgue** sau de **măsură nulă** dacă $\mu^*(E) = 0$.

Ţinând cont de definiţie, E este neglijabilă în sens Lebesgue dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un şir de intervale închise fără puncte interioare comune $(J_n)_n$ a.î. $E \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty J_n$ şi $\sum_{n=0}^\infty |J_n| < \varepsilon$.

5.1.19 Definiţie. O mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^2$ este **măsurabilă** (în sens Lebesgue) dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists D \in \tau_u^2$ astfel încât $E \subseteq D$ şi $\mu^*(D \setminus E) < \varepsilon$.

Fie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}^2$ clasa mulţimilor măsurabile Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$ şi fie $\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$; μ se va numi **măsura Lebesgue** pe $\mathbb{R}^2$.

Dacă $E \in \mathcal{L}^2$, vom nota cu $\mathcal{L}^2(E) = \{F \subseteq E : F \in \mathcal{L}^2\}$, familia submulţimilor măsurabile ale lui E.

Se poate cu uşurintă demonstra că $E \in \mathcal{L}^2$ dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $F = \bar{F} \subseteq E \subseteq D \in \tau_u^2$ a.î. $\mu(D \setminus F) < \varepsilon$.

5.1.20 Observaţii. 1). $\tau_u^2 \subseteq \mathcal{L}^2$. Rezultă de aici că μ este prelungirea măsurii mulţimilor deschise şi astfel notaţia făcută nu conduce la confuzii.
2). $\forall E \subseteq \mathbb{R}^2$ cu $\mu^*(E) = 0, E \in \mathcal{L}^2$.
3). $\forall (E_n)_n \subseteq \mathcal{L}^2, \bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{L}^2$.
4). Oricare ar fi $E \in \mathcal{L}^2$ cu $\mu(E) = 0$ şi oricare ar fi $F \subseteq E$, $F \in \mathcal{L}^2$.
5). Orice interval $J \in \mathcal{J}$ este mulţime măsurabilă şi $\mu(J) = |J|$.

Rezultă că $\mathcal{L}^2$ este o σ-algebră pe $\mathbb{R}^2$ şi că μ este o măsură completă pe $\mathcal{L}^2$. Astfel μ va avea toate proprietăţile unei măsuri (vezi teorema 1.4.7).

În finalul acestui paragraf vom da două rezultate în care se arată cum poate fi calculată măsura unei mulţimi din $\mathcal{L}^2$ cu ajutorul măsurii Lebesgue din $\mathbb{R}$.

5.1.21 Teoremă.
Fie $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$; atunci $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ şi $\mu(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$.

Demonstraţie.
1). Vom presupune pentru început că $\lambda(A) < +\infty$ şi $\lambda(B) < +\infty$.
a). Dacă A şi B sunt intervale, atunci, din punctul 5) al obsevaţiei 5.1.20,

$$A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2) \text{ şi } \mu(A \times B) = |A \times B| = |A| \cdot |B| = \lambda(A) \cdot \lambda(B).$$

b). Fie acum $A, B \in \tau_u$; atunci, conform teoremei de structură a mulţimilor deschise în $\mathbb{R}$ (teorema 1.1.3), $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ şi $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$, unde $(I_n)_n, (J_m)_m$ sunt şiruri de intervale deschise, disjuncte două câte două.
$A \times B = \cup_n \cup_m (I_n \times J_m)$ şi, deoarece $I_n \times J_m$ sunt intervale bidimensionale deschise şi disjuncte două câte două,

$$\mu(A \times B) = \sum_{n,m} |I_n \times J_m| = \sum_{n,m} |I_n| \cdot |J_m| = \lambda(A) \cdot \lambda(B).$$

c). Fie acum cazul general, $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Folosind caracterizarea dată în exerciţiul 12) din 1.5, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există F_1, F_2 închise şi D_1, D_2 deschise în $\mathbb{R}$ a.î. $F_1 \subseteq A \subseteq D_1$, $F_2 \subseteq B \subseteq D_2$ şi $\lambda(D_1 \setminus F_1) < \varepsilon_1$, $\lambda(D_2 \setminus F_2) < \varepsilon_2$, unde $\varepsilon_1 = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(\lambda(B)+1)}\}$ iar $\varepsilon_2 = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(\lambda(A)+1)}\}$. Atunci $F_1 \times F_2$ este închisă, $D_1 \times D_2$ este deschisă în $\mathbb{R}^2$ şi $F_1 \times F_2 \subseteq A \times B \subseteq D_1 \times D_2$. Deoarece $(D_1 \times D_2) \setminus (F_1 \times F_2) \subseteq [(D_1 \setminus F_1) \times D_2] \bigcup [D_1 \times (D_2 \setminus F_2)]$, obţinem

$$\mu[(D_1 \times D_2) \setminus (F_1 \times F_2)] \leq \mu[(D_1 \setminus F_1) \times D_2] + \mu[D_1 \times (D_2 \setminus F_2)] =$$

$$= \lambda(D_1 \setminus F_1) \cdot \lambda(D_2) + \lambda(D_1) \cdot \lambda(D_2 \setminus F_2) < \varepsilon_1 \cdot \lambda(D_2) + \lambda(D_1) \cdot \varepsilon_2 <$$

$$< \varepsilon_1 \cdot (\lambda(B) + \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \cdot (\lambda(A) + \varepsilon_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Rezultă de aici că $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
Pe de o parte $\mu(A \times B) \leq \mu(D_1 \times D_2) = \lambda(D_1) \cdot \lambda(D_2) < (\lambda(A) + \varepsilon_1) \cdot (\lambda(B) + \varepsilon_2) = \lambda(A) \cdot \lambda(B) + \varepsilon_1 \cdot \lambda(B) + \varepsilon_2 \cdot \lambda(A) = \varepsilon_3 < \lambda(A) \cdot \lambda(B) + \varepsilon$.
Pe de altă parte $\mu(A \times B) \geq \mu(F_1 \times F_2) = \mu(D_1 \times D_2) - \mu((D_1 \times D_2) \setminus (F_1 \times F_2)) \geq \lambda(D_1) \cdot \lambda(D_2) - \varepsilon_3 \geq \lambda(A) \cdot \lambda(B) - \varepsilon_3 > \lambda(A) \cdot \lambda(B) - \varepsilon$.
Cum ε este arbitrar, rezultă că $\mu(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$.
2). Să considerăm acum cazul în care A sau B pot avea şi măsura $+\infty$. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fie $A_n = A \cap [-n, n]$ şi $B_n = B \cap [-n, n]$. Atunci $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, de unde $A \times B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \times B_n)$. Deoarece A_n şi B_n au măsură finită, rezultă din punctul 1) că $A_n \times B_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; deci $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Şirurile $(A_n)_n$ şi $(B_n)_n$ sunt crescătoare şi la fel este şi şirul $(A_n \times B_n)_n$; folosind proprietatea de continuitate a oricărei măsuri pe şiruri ascendente (vezi proprietatea 6) din teorema 1.4.7) şi punctul 1), rezultă

$$\mu(A \times B) = \lim_n \mu(A_n \times B_n) = \lim_n \lambda(A_n) \cdot \lambda(B_n) = \lambda(A) \cdot \lambda(B). \qquad \blacksquare$$

Oricare ar fi $E \subseteq \mathbb{R}^2$ şi oricare $x, y \in \mathbb{R}$, vom nota cu

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\},$$

secţiunea lui E prin x şi cu

$$E^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\},$$

secţiunea lui E prin a doua variabilă y.

5.1.22 Teoremă. *Fie $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$; aproape pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $E_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Funcţia $x \mapsto \lambda(E_x)$ este pozitivă şi măsurabilă pe $\mathbb{R}$ şi*

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x).$$

Demonstraţie. 1). Vom trata întâi cazul în care E este o mulţime mărginită.

a). Fie $E = [a, b] \times [c, d]$ un interval închis din $\mathbb{R}^2$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \begin{cases} \emptyset & , x \notin [a, b] \\ [c, d] & , x \in [a, b] \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ şi $\lambda(E_x) = (d - c) \cdot \chi_{[a,b]}(x)$. Rezultă că $x \mapsto \lambda(E_x)$ este o funcţie măsurabilă şi

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x) = \int_{[a,b]} (d - c) d\lambda = (b - a) \cdot (d - c) = \mu(A).$$

b). Fie acum $E \in \tau_u^2$; conform teoremei de structură a mulţimilor deschise în plan (teorema 5.1.10), $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} J^n$, unde J^n sunt intervale bidimensionale închise cu interioarele disjuncte două câte două. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_x^n$. Deoarece J_x^n sunt intervale închise în $\mathbb{R}$, rezultă că E_x este mulţime boreliană în $\mathbb{R}$ şi deci $E_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Intervalele J_x^n au în comun cel mult câte un punct şi atunci $\lambda(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_x^n)$ (vezi teorema 1.1.8). Atunci funcţia $x \mapsto \lambda(E_x)$ este limita punctuală a şirului de funcţii $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda(J_x^n)$; conform punctului a) acesta este un şir de funcţii măsurabile şi atunci limita sa punctuală este măsurabilă

(vezi punctul 5) al teoremei 2.1.11). Folosim acum teorema lui Beppo Levi (corolarul 3.1.9) şi punctul a) şi obţinem

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x)d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \lambda(J_x^n)d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n) = \mu(E).$$

c). Fie acum E o mulţime închisă în $\mathbb{R}^2$. Deoarece E este mărginită, există un interval deschis $I =]a,b[\times]c,d[\subseteq \mathbb{R}^2$ a.î. $E \subseteq I$. Mulţimea $D = I \setminus E$ este deschisă şi $\mu(E) = \mu(I) - \mu(D)$. Din punctul b), $\mu(D) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(D_x)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}}[\lambda(I_x) - \lambda(E_x)]d\lambda(x) = (b-a)\cdot(d-c) - \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x)d\lambda(x)$. Rezultă că $\mu(E) = \mu(I) - \mu(D) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x)d\lambda(x)$.

d). Fie acum $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ o mulţime mărginită oarecare şi fie $0 < \delta < 1$ arbitrar.

• Din caracterizarea menţionată după definiţia 5.1.19, există D^1 deschisă şi F^1 închisă a.î. $F^1 \subseteq E \subseteq D^1$ şi $\mu(D^1 \setminus F^1) < \frac{1}{4}\cdot\delta^2$. Mulţimea $U^1 = D^1 \setminus F^1$ este deschisă şi atunci, folosind punctul b), obţinem

$$\mu(U^1) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(U_x^1)d\lambda(x) < \frac{1}{4}\cdot\delta^2.$$

Vom demonstra, prin reducere la absurd, că există o mulţime $E_1^\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ a.î. $\{x \in \mathbb{R} : \lambda(U_x^1) \geq \frac{1}{2}\cdot\delta\} \subseteq E_1^\delta$ şi $\lambda(E_1^\delta) < \frac{1}{2}\cdot\delta$. Într-adevăr, dacă nu ar fi aşa, atunci mulţimea $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \lambda(U_x^1) \geq \frac{1}{2}\cdot\delta\}$ ar avea măsura $\lambda(E_1) \geq \frac{1}{2}\cdot\delta$ şi atunci

$$\mu(U^1) \geq \int_{E_1} \lambda(U_x^1)d\lambda(x) \geq \frac{1}{2}\cdot\delta\cdot\lambda(E_1) \geq \frac{1}{4}\cdot\delta^2,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie.

• Fie acum D^2 deschisă şi F^2 închisă a.î. $F^2 \subseteq E \subseteq D^2$ şi $\mu(D^2 \setminus F^2) < \frac{1}{4^2}\cdot\delta^2$. Notăm cu $U^2 = D^2 \setminus F^2 \in \tau_u^2$; la fel ca în aliniatul precedent, demonstrăm că există $E_2^\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ a.î. $\{x \in \mathbb{R} : \lambda(U_x^2) \geq \frac{1}{2^2}\cdot\delta\} \subseteq E_2^\delta$ şi $\lambda(E_2^\delta) < \frac{1}{2^2}\cdot\delta$.

Continuăm inductiv acest raţionament.

• Fie D^i deschisă şi F^i închisă a.î. $F^i \subseteq E \subseteq D^i$ şi $\mu(D^i \setminus F^i) < \frac{1}{4^i}\cdot\delta^2$; mulţimea $U^i = D^i \setminus F^i$ este deschisă şi, la fel ca mai sus, există $E_i^\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ a.î. $\{x \in \mathbb{R} : \lambda(U_x^i) \geq \frac{1}{2^i}\cdot\delta\} \subseteq E_i^\delta$ şi $\lambda(E_i^\delta) < \frac{1}{2^i}\cdot\delta$.

• $\cdots\cdots\cdots$

Fie acum $N_\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^\delta$; atunci $\lambda(N_\delta) < \delta$.

Deoarece δ este arbitrar pozitiv, îl facem să parcurgă mulţimea $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ şi notăm $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}$; atunci $\lambda(N) \leq \lambda(N_{\frac{1}{n}}) \leq \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\lambda(N) = 0$.

Fie acum $x \in \mathbb{R}\setminus N$; atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x \in \mathbb{R}\setminus N_{\frac{1}{n}} = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R}\setminus E_i^{\frac{1}{n}})$.

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există i a.î. $\frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$; deoarece $x \notin E_i^{\frac{1}{n}}$, $\lambda(U_x^i) < \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Am demonstrat astfel că, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus N$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există F_x^i închisă şi D_x^i deschisă în $\mathbb{R}$ a.î. $F_x^i \subseteq E_x \subseteq D_x^i$ şi $\lambda(D_x^i \setminus F_x^i) < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că $E_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus N$. Deci $E_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $x \mapsto \lambda(E_x)$ este deci bine definită pe $\mathbb{R}$ (în punctele lui N convenim să dăm acestei funcţii valoarea 0). În plus, $\lambda(E_x) = \lim_{i\to\infty} \lambda(D_x^i)$; astfel funcţia de mai sus este limita unui şir de funcţii măsurabile (vezi punctul b)) şi deci este măsurabilă şi pozitivă.

Deoarece $\lambda(F_x^i) \le \lambda(E_x) \le \lambda(D_x^i)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi i, putem folosi punctele b) şi c) pentru a obţine:

$$\mu(F^i) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(F_x^i) d\lambda(x) \le \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x) \le \int_{\mathbb{R}} \lambda(D_x^i) d\lambda(x) = \mu(D^i) <$$

$$< \mu(F^i) + \frac{1}{4^i} \cdot \delta^2, \text{ oricare ar fi } i \in \mathbb{N}^* \text{ şi}$$

$$\mu(F^i) \le \mu(E) \le \mu(D^i) < \mu(F^i) + \frac{1}{4^i} \cdot \delta^2, \text{ oricare ar fi } i \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că

$$\left| \mu(E) - \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x) \right| < \frac{1}{4^i} \cdot \delta^2, \text{ oricare ar fi } i \in \mathbb{N}^*$$

deci $\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x)$.

2). Dacă E nu este mărginită atunci, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ considerăm mulţimile măsurabile şi mărginite $E^n = E \cap ([-n, n] \times [-n, n])$.

Conform punctului 1),

$$(*) \qquad \mu(E^n) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x^n) d\lambda(x), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Observăm că şirul $(E^n)_n$ este crescător şi deci $\mu(E) = \lim_n \mu(E^n)$.
Pe de altă parte, şirul de funcţii $x \mapsto \lambda(E_x^n)$ este de asemenea crescător şi, conform teoremei convergenţei monotone,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x) = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x^n) d\lambda(x).$$

Concluzia teoremei o obţinem trecând la limită în relaţia $(*)$. ∎

5.1.23 Observaţii. (i) În general, nu toate secţiunile unei mulţimi măsurabile din $\mathbb{R}^2$ sunt măsurabile în $\mathbb{R}$. Să considerăm de exemplu o mulţime $N \subseteq \mathbb{R}$ ne-măsurabilă Lebesgue (în comentariul făcut după corolarul 1.4.9 am justificat existenţa unor astfel de mulţimi) şi fie $E = \{0\} \times N \subseteq \mathbb{R}^2$; $E \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}$ şi $\mu(\{0\} \times \mathbb{R}) = 0$ (vezi exerciţiul 1) de la 5.4). Deoarece măsura μ este completă, $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Secţiunea prin 0 a acestei mulţimi este $E_0 = N$ şi deci nu este măsurabilă în $\mathbb{R}$.

(ii) Se arată similar că

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E^y) d\lambda(y).$$

(iii) Formula de calcul dată în teorema precedentă permite şi o demonstraţie rapidă a principiului lui Cavalieri în plan:
Fie $E, F \subseteq \mathbb{R}^2$, a.î. orice dreaptă paralelă cu o direcţie fixă le intersectează după mulţimi liniare de aceeaşi "lungime"; atunci E şi F au aceeaşi "arie".
Într-adevăr, dacă presupunem că direcţia fixă este dată de axa Oy, atunci din ipoteza principiului rezultă că $\lambda(E_x) = \lambda(F_x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (aici am presupus că mulţimile sunt măsurabile Lebesgue şi că "lungimea" este asimilată cu măsura din $\mathbb{R}$). Teorema precedentă ne asigură că $\mu(E) = \mu(F)$ şi, dacă "aria" unei mulţimi plane este măsura ei, aceasta este concluzia principiului.

(iv) Procedeul de construcţie a măsurii Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$ se poate adapta cu uşurinţă pentru $\mathbb{R}^3$ (şi mai general pentru $\mathbb{R}^n, n \geq 1$). Astfel, se poate construi σ-algebra submulţimilor măsurabile în $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}^3$ şi o măsură completă, θ, pe această σ-algebră, măsură care are toate proprietăţile măsurii Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$. Pentru orice $M \in \mathcal{L}^3$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$, putem defini secţiunea lui M prin x:

$$M_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in M\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Se poate demonstra la fel ca în $\mathbb{R}^2$ că, λ-a.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $M_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$; funcţia $x \mapsto \mu(M_x)$ estev măsurabilă şi pozitivă şi are loc formula:

$$\theta(M) = \int_{\mathbb{R}} \mu(M_x) d\lambda(x).$$

(v) Formula de calcul dată la punctul precedent permite o demonstraţie rapidă a principiului lui Cavalieri în spaţiu:
Fie $M, N \subseteq \mathbb{R}^3$, a.î. orice plan paralel cu un plan fix le intersectează după mulţimi plane de aceeaşi "arie"; atunci M şi N au acelaşi "volum".
Într-adevăr, dacă presupunem că planul fix este planul yOz, atunci din

ipoteza principiului rezultă că $\mu(M_x) = \mu(N_x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (aici am presupus că mulţimile sunt măsurabile Lebesgue şi că "aria" este asimilată cu măsura din $\mathbb{R}^2$). Teorema precedentă ne asigură că $\theta(M) = \theta(N)$ şi, dacă "volumul" unei mulţimi din spaţiu este măsura ei, aceasta este concluzia principiului.

5.2 Integrarea în raport cu măsura produs

Am construit în paragraful precedent măsura completă $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \bar{\mathbb{R}}_+$.

5.2.1 Definiţie. Fie $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ şi $f : E \to \mathbb{R}$; funcţia de două variabile f se numeşte μ-**măsurabilă pe** E, sau pur şi simplu **măsurabilă** dacă, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(-\infty, a) = \{(x, y) \in E : f(x, y) < a\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Vom nota cu $\mathcal{L}(E)$ mulţimea funcţiilor măsurabile pe E şi cu $\mathcal{L}_+(E)$ submulţimea funcţiilor măsurabile şi pozitive.

La fel ca în cazul unidimensional, se poate arăta că $\mathcal{L}(E)$ se poate organiza, faţă de operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari, ca un spaţiu vectorial real ce conţine $C(E)$ - mulţimea funcţiilor reale continue pe E.

5.2.2 Definiţie. O funcţie $f : E \to \mathbb{R}$ este **etajată** pe E dacă ia un număr finit de valori pe submulţimi măsurabile ale lui E, deci dacă este de forma $f = \sum_{k=1}^{p} a_k \chi_{E_k}$, unde $\{E_1, \cdots, E_p\}$ formează o partiţie a măsurabilă a mulţimii E şi $\chi_{E_k}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in E_k, \\ 0, & (x, y) \in E \setminus E_k. \end{cases}$

Vom nota $\mathcal{E}(E)$ mulţimea funcţiilor etajate pe E şi vom observa că $\mathcal{E}(E) \subseteq \mathcal{L}(E)$.

Putem defini limita μ-a.p.t. a unui şir de funcţii măsurabile şi putem demonstra că aceasta este o funcţie măsurabilă. De asemenea compunerea dintre o funcţie continuă şi una măsurabilă este măsurabilă.

Ca şi în cazul lui $\mathbb{R}$, se pot defini convergenţa aproape uniformă şi convergenţa în măsură; relaţiile între acestea şi convergenţa în a.p.t. sunt aceleaşi ca în cazul unidimensional.

Funcţionează, ca şi în cazul unidimensional, teorema lui Riesz (orice şir convergent în măsură admite un subşir convergent aproape uniform) şi teorema lui Egorov (convergenţa a.p.t. pe mulţimi de măsură finită antrenează convergenţa aproape uniformă).

Putem, de asemenea, prezenta o teoremă de aproximare a funcţiilor măsurabile cu funcţii etajate:

5.2.3 Teoremă. *Fie* $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *şi* $f : E \to \mathbb{R}$.

1). $f \in \mathcal{L}_+(E) \Longleftrightarrow \exists (f_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+(E), f_n \uparrow f$.

2). $f \in \mathcal{L}(E) \Longleftrightarrow \exists (f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(E), f_n \xrightarrow[E]{punctual} f$.

3). Dacă funcţia $f \in \mathcal{L}(E)$ *este mărginită atunci există un şir* $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}(E)$ *a.î.* $f_n \xrightarrow[E]{uniform} f$.

Integrala funcţiilor de două variabile se introduce urmând aceleaşi etape ca în cazul funcţiilor de o variabilă. Fie $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ şi $f : E \to \mathbb{R}$; atunci

1). Dacă $f = \sum_{k=1}^{p} a_k \chi_{E_k} \in \mathcal{E}_+(E)$ atunci:

$$\iint_E f d\mu = \iint_E f(x,y) d\mu(x,y) = \sum_{k=1}^{p} a_k \mu(E_k).$$

2). Dacă $f \in \mathcal{L}_+(E)$ atunci:

$$\iint_E f d\mu = \sup\left\{ \iint_E \varphi d\mu : \varphi \in \mathcal{E}_+(E), \varphi \leq f \right\}.$$

3). Dacă $f \in \mathcal{L}(E)$ şi dacă măcar una dintre integralele părţii pozitive $f^+ = \sup\{f, \underline{0}\}$ sau părţii negative $f^- = \sup\{-f, \underline{0}\}$ este finită, atunci:

$$\iint_E f d\mu = \iint_E f^+ d\mu - \iint_E f^- d\mu.$$

O funcţie $f \in \mathcal{L}(E)$ este μ**-integrabilă** dacă integrala ei este finită; vom nota cu $\mathcal{L}^1(E)$ mulţimea funcţiilor integrabile pe E şi cu $\mathcal{L}^1_+(E)$ submulţimea funcţiilor integrabile şi pozitive. $\mathcal{L}^1(E)$ se organizează ca spaţiu vectorial real faţă de operaţiile obişnuite de adunare şi înm ulţire cu scalari.

Se demonstrează la fel ca în cazul unidimensional că $f \in \mathcal{L}^1(E)$ dacă şi numai dacă $|f| \in \mathcal{L}^1_+(E)$ şi că

$$\left| \iint_E f d\mu \right| \leq \iint_E |f| d\mu.$$

Putem demonstra şi aici teorema convergenţei monotone

$$(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}_+(E), f_n \uparrow f \Longrightarrow \iint_E f_n d\mu \uparrow \iint_E f d\mu$$

şi lema lui Fatou: dacă $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}_+(E)$ şi $\liminf_n f_n : E \to \mathbb{R}$ atunci:

$$\iint_E \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \iint_E f_n d\mu.$$

Putem de asemenea formula şi teorema lui Beppo Levi.

Integrala este numărabil aditivă în raport cu domeniul de integrare: Oricare ar fi $(E_n)_n \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ cu $E_n \cap E_m = \emptyset$, pentru orice $n \neq m$ şi oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^1(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$, $f \in \mathcal{L}^1(E_n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\iint_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{E_n} f d\mu.$$

Aplicaţia $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(E) \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\|f\|_1 = \iint_E |f| d\mu, \forall f \in \mathcal{L}^1(E)$, este o seminormă iar spaţiul $(\mathcal{L}^1(E), \|\cdot\|_1)$ este complet.

Rezultă ca şi în cazul unidimensional că spaţiul cât $L^1(E) = \mathcal{L}^1(E)|_{\dot{=}}$ este un spaţiu Banach faţă de norma $\|\cdot\|_1$ definită prin $\|[f]\|_1 = \|f\|_1$ (aici $\dot{=}$ notează egalitatea μ-a.p.t.).

Putem formula şi demonstra teorema convergenţei dominate:

5.2.4 Teoremă. *Fie $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), (f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(E)$ şi $g \in \mathcal{L}^1(E)$ a.î.*

1). $f_n \xrightarrow[E]{a.p.t.} f$ şi

2). $|f_n| \leq g$, a.p.t. pe E, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Atunci $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(E), f \in \mathcal{L}^1(E)$ şi

$$\iint_E f_n d\mu \to \iint_E f d\mu.$$

Vom menţiona o formulă de schimbare de variabilă similară celei de la funcţii de o variabilă (vezi teorema 3.6.2).

5.2.5 Teoremă. *Fie $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difeomorfism de clasă C^1 (g bijecţie cu derivate parţiale continue şi g^{-1} cu derivate parţiale continue) şi fie $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Oricare ar fi $f \in \mathcal{L}^1(g(E)), (f \circ g) \cdot \left| \dfrac{D(g_1, g_2)}{D(x, y)} \right| \in \mathcal{L}^1(E)$ şi*

$$\int_{g(E)} f d\mu = \int_E (f \circ g) \cdot \left| \frac{D(g_1, g_2)}{D(x, y)} \right| d\mu.$$

În sfârşit se pot defini similar spaţiile $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$ şi se pot demonstra proprietăţi similare cu cele din cazul unidimensional.

5.2.6 Observaţie. Toată această construcţie a integralei se poate uşor adapta pentru $\mathbb{R}^3$. Folosind integrala din $\mathbb{R}^2$ putem da încă o formulă de calcul a măsurii mulţimilor din $\mathbb{R}^3$ (pe lângă formula prezentată la (iv) din 5.1.23).

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, putem defini secţiunea lui $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ prin (x, y):

$$M_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in M\}.$$

Se poate arăta că $M_{(x,y)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, μ-a.p.t. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Funcţia $(x, y) \mapsto \lambda(M_{(x,y)})$ este măsurabilă şi pozitivă şi

$$\theta(M) = \iint_{\mathbb{R}^2} \lambda(E_{(x,y)}) d\mu(x, y).$$

5.3 Teorema lui Fubini

5.3.1 Definiţie. Fie $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{L}(A \times B)$. Următoarele integrale, în cazul în care există, se vor numi **integralele iterate** ale funcţiei f:

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x), \int_B \left(\int_A f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

În acest paragraf ne propunem să prezentăm rezultate care permit reducerea calculului integralei duble la calculul integralelor iterate.

În teorema 5.1.22 am arătat că, pentru orice $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $E_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, aproape pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcţia $x \mapsto \lambda(E_x)$ este pozitivă şi măsurabilă pe $\mathbb{R}$ şi $\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) d\lambda(x)$. Înlocuind E cu χ_E şi remarcând că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y)$, putem rescrie formula de calcul a măsurii lui E:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \chi_E d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Dacă $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ şi $E \subseteq A \times B$ atunci formula de mai sus devine:

$$\iint_{A \times B} \chi_E d\mu = \int_A \left(\int_B \chi_E(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Vom arăta că relaţia de mai sus funcţionează pentru orice funcţie măsurabilă şi pozitivă.

5.3.2 Teoremă (teorema lui Tonelli). *Dacă $f \in \mathcal{L}_+(A \times B)$, atunci funcţia $v_x = f(x, \cdot) : B \to \mathbb{R}$ este măsurabilă şi pozitivă pe B, λ-aproape pentru*

toţi $x \in A$, *funcţia* $u : A \to \mathbb{R}$, *definită prin* $u(x) = \int_B f(x,y)d\lambda(y)$ *este măsurabilă şi pozitivă pe* A *(în punctele* $x \in A$ *în care* v_x *nu este integrabilă considerăm* $u(x) = 0$*) şi*

$$\iint_{A\times B} f d\mu = \int_A u d\lambda \text{ sau}$$

$$\iint_{A\times B} f(x,y)d\mu(x,y) = \int_A \left(\int_B f(x,y)d\lambda(y)\right) d\lambda(x).$$

Demonstraţie. 1). Presupunem întâi că $f = \chi_E \in \mathcal{L}_+(A \times B)$. Atunci $E \in \mathcal{L}(A \times B)$, $v_x = \chi_{E_x}, u(x) = \lambda(E_x)$, a.p.t. $x \in \mathbb{R}$ şi astfel demonstraţia este consecinţăă teoremei 5.1.22 şi a observaţiei facută mai sus.

2). Fie acum $f = \sum_{i=1}^p a_i \chi_{E_i} \in \mathcal{E}_+(A \times B) \subseteq \mathcal{L}_+(A \times B)$. $v_x = \sum_{i=1}^p a_i \chi_{E_{ix}}$ este deci măsurabilă a.p.t. $x \in A$ şi $u(x) = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(E_{ix})$ este de asemenea măsurabilă şi

$$\iint_{A\times B} f d\mu(E) = \sum_{i=1}^p a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^p a_i \int_A \lambda(E_{ix}) d\lambda(x) =$$

$$= \int_A \left(\sum_{i=1}^p a_i \lambda(E_{ix})\right) d\lambda(x) = \int_A \left[\int_B \left(\sum_{i=1}^p a_i \chi_{E_{ix}}(y)\right) d\lambda(y)\right] d\lambda(x) =$$

$$= \int_A \left(\int_B f(x,y)d\lambda(y)\right) d\lambda(x).$$

3). Fie acum $f \in \mathcal{L}_+(A \times B)$; atunci există un şir de funcţii etajate şi pozitive, $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+(A \times B)$, crescător, convergent la f (vezi 5.2.3). Fie $n \in \mathbb{N}$ oarecare; din punctul precedent, aproape pentru orice $x \in A$, $v_x^n = f_n(x, \cdot)$ este măsurabilă. Rezultă că şirul $(v_x^n)_n = (f_n(x, \cdot))_n$ este un şir de funcţii măsurabile, a.p.t. $x \in A$ (o reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile este neglijabilă) şi deci limita sa, $v_x = f(x, \cdot)$ este măsurabilă pe B. Deoarece $v_x^n = f_n(x, \cdot) \uparrow f(x, \cdot) = v_x$ putem aplica teorema convergenţei monotone (teorema 3.1.7) şi obţinem

$$u_n(x) = \int_B v_x^n d\lambda = \int_B f_n(x, \cdot)d\lambda \uparrow \int_B f(x. \cdot)d\lambda = \int_B v_x d\lambda = u(x).$$

Deoarece $(u_n)_n$ este un şir de funcţii măsurabile pe A, rezultă că u este măsurabilă şi pozitivă pe A şi, aplicând din nou teorema convergenţei monotone şi rezultatul de la punctul 2), obţinem:

$$\iint_{A\times B} f d\mu = \lim_n \iint_{A\times B} f_n d\mu = \lim_n \int_A \left(\int_B f_n(x,y)d\lambda(y)\right) d\lambda(x) =$$

$$= \lim_n \int_A u_n d\lambda = \int_A u d\lambda = \int_A \left(\int_B f(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x). \qquad \blacksquare$$

5.3.3 Observaţie. Cu o demonstraţie asemănătoare obţinem în ipotezele teoremei lui Tonelli:

$$\iint_{A\times B} f(x,y) d\mu(x,y) = \int_B \left(\int_A f(x,y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

Teorema următoare arată că, dacă funcţia f este integrabilă pe $A \times B$ atunci integralele iterate există şi sunt egale cu integrala funcţiei.

5.3.4 Teoremă (teorema lui Fubini). *Fie $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{L}^1(A \times B)$; atunci funcţia $v_x = f(x, \cdot) : B \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe B, λ-aproape pentru toţi $x \in A$, funcţia $u : A \to \mathbb{R}$, definită prin $u(x) = \int_B f(x,y)d\lambda(y)$ este integrabilă pe A (în punctele $x \in A$ în care v_x nu este integrabilă considerăm $u(x) = 0$) şi*

$$\iint_{A\times B} f d\mu = \int_A u d\lambda \ \textit{sau}$$

$$\iint_{A\times B} f(x,y) d\mu(x,y) = \int_A \left(\int_B f(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Demonstraţie. Fie $f^+ = \sup\{f, 0\}$ partea pozitivă şi $f^- = \sup\{-f, 0\}$ partea negativă a funcţiei f. Deoarece $f \in \mathcal{L}^1(A\times B)$, $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1_+(A\times B) \subseteq \mathcal{L}_+(A \times B)$.

Rezultă din teorema lui Tonelli că

$$\iint_{A\times B} f^+(x,y) d\mu(x,y) = \int_A \left(\int_B f^+(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) < +\infty \text{ şi}$$

$$\iint_{A\times B} f^-(x,y) d\mu(x,y) = \int_A \left(\int_B f^-(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) < +\infty.$$

Rezultă că $v_x^+ = f^+(x, \cdot), v_x^- = f^-(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1_+(B)$; deci $v_x \in \mathcal{L}^1(B)$, aproape pentru orice $x \in A$ şi de asemenea $u^+, u^- \in \mathcal{L}^1_+(A)$ şi deci $u \in \mathcal{L}^1(A)$ şi

$$\iint_{A\times B} f d\mu = \iint_{A\times B} f^+ d\mu - \iint_{A\times B} f^- d\mu =$$

$$= \int_A \left(\int_B (f^+(x,y) - f^-(x,y)) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) =$$

$$= \int_A \left(\int_B f(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

5.3.5 Observaţie. Cu o demonstraţie asemănătoare obţinem în ipotezele teoremei lui Fubini:

$$\iint_{A\times B} f(x,y)d\mu(x,y) = \int_B \left(\int_A f(x,y)d\lambda(x)\right) d\lambda(y).$$

Încheiem acest capitol cu un alt rezultat de iteraţie pentru care nu mai dăm demonstraţia.

5.3.6 Teoremă. *Fie $f \in \mathcal{L}(A \times B)$; dacă una dintre integralele:*

$$\iint_{A\times B} |f|d\mu, \int_A \left(\int_B |f(x,y)|d\lambda(y)\right) d\lambda(x), \int_B \left(\int_A |f(x,y)|d\lambda(x)\right) d\lambda(y)$$

este finită atunci

$$\iint_{A\times B} f d\mu = \int_A \left(\int_B f(x,y)d\lambda(y)\right) d\lambda(x) = \int_B \left(\int_A f(x,y)d\lambda(x)\right) d\lambda(y).$$

5.4 Exerciţii

1). Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$; dacă $\lambda^*(A) = 0$ atunci $\mu^*(A \times B) = 0$ şi deci $A \times B \in \mathcal{L}^2$.

(Indicaţie: Se va considera întâi cazul în care $B = [a, b]$ este un interval mărginit şi închis şi apoi se va ţine cont de faptul $\mathbb{R}$ se poate reprezenta ca reuniune numărabilă de astfel de intervale.)

2). Să se arate că orice dreaptă din plan are măsura Lebesgue zero.

(Indicaţie: O dreaptă paralelă cu axa Oy sau cu axa Ox este de forma $\{a\} \times \mathbb{R}$ sau respectiv $\mathbb{R} \times \{b\}$ şi rezultatul urmează din punctul precedent.

Fie acum o dreaptă de ecuaţie $y = ax + b$; vom presupune că $a > 0$. Vom arăta întâi că mulţimea $E = \{(x, ax + b) : x \geq 0\}$ este de măsură zero. Pentru orice $\varepsilon > 0$ fie $\varepsilon_1 = \sqrt{\dfrac{6\varepsilon}{a\pi^2}}$ şi fie şirul $(x_n^\varepsilon)_n$ unde $x_0^\varepsilon = 0$ şi $x_n^\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Vom construi intervalele închise $J_n = [x_n^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon] \times [ax_n^\varepsilon + b, ax_{n+1}^\varepsilon + b], \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată că $E \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty J_n$ şi că $\sum_{n=0}^\infty |J_n| = \varepsilon$.)

3). Fie $E = [0, 1] \times \{0\}, F = \{0\} \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$; să se arate că $\mu(E) = \mu(F) = 0$ şi că $\mu(E + F) = 1$ $(E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\})$.

4). Folosind formula dată în teorema 5.1.22 să se calculeze $\mu(E)$, unde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$.

5). Să se calculeze $\theta(M)$ unde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$.

6). Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{L}^1(A)$ şi $g \in \mathcal{L}^1(B)$ atunci funcţia $h : A \times B \to \mathbb{R}, h(x, y) = f(x) \cdot g(y), \forall (x, y) \in A \times B$, este integrabilă pe $A \times B$ şi

$$\iint_{A\times B} f(x) \cdot g(y) d\mu(x, y) = \left(\int_A f(x) d\lambda(x)\right) \cdot \left(\int_B g(y) d\lambda(y)\right).$$

7). Fie $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Să se arate că $f \notin \mathcal{L}^1([-1, 1] \times [-1, 1])$ dar

$$\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x, y) d\lambda(y)\right) d\lambda(x) = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x, y) d\lambda(x)\right) d\lambda(y).$$

8). Să se calculeze $\iint_{[0,1]\times[0,+\infty)} e^{-y} \cdot \sin(2xy) d\mu(x, y)$. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \cdot \frac{\sin y^2}{y} dy = \frac{1}{4} \cdot \ln 5.$$

Capitolul 6

Măsuri reale

În teorema 3.3.1 am văzut că integrala unei funcţii poate fi privită ca o funcţie de mulţime numărabil aditivă în raport cu mulţimea pe care integrăm. Acest lucru justifică interesul pentru funcţiile de mulţime reale numărabil aditive. Vom aborda în acest capitol câteva dintre proprietăţile interesante ale acestor funcţii. Vom arăta că orice astfel de funcţie este diferenţa a două măsuri pozitive şi vom prezenta condiţiile în care astfel de funcţii pot fi reprezentate ca integrale ale unor funcţii măsurabile. Ultimul paragraf al capitolului prezintă relaţii profunde ale teoriei măsurii cu problema diferenţiabilităţii funcţiilor.

6.1 Teoreme de reprezentare

În acest capitol vom folosi noţiunile şi rezultatele din paragrafele 1.4, 2.4 şi 3.4, intitulate generic "Cadru abstract".

Fie X o mulţime abstractă şi $\mathcal{A}$ o σ-algebră de părţi ale lui X; oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$, vom nota cu $\mathcal{A}(B)$ familia mulţimilor $C \subseteq B, C \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}(B)$ este o σ-algebră pe B. Fie acum $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \bar{\mathbb{R}}_+$ o măsură pozitivă completă şi σ-finită pe X. Vom nota cu $\mathcal{M}(X)$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale măsurabile pe X şi cu $\mathcal{M}_+(X)$ submulţimea funcţiilor măsurabile şi pozitive.

Pentru orice $f \in \mathcal{M}_+(X)$, am definit în paragraful 3.4 integrala prin

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in \mathcal{E}_+(X), \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

$\mathcal{L}^1_+(X)$ notează mulţimea funcţiilor măsurabile şi pozitive care au integrală finită.

În sfârşit, oricare ar fi $f \in \mathcal{M}(X)$ cu $f^- = \sup\{-f, \underline{0}\} \in \mathcal{L}^1_+(X)$, fie $\nu_f : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ definită prin

$$\nu_f(B) = \int_B f d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu, \text{ oricare ar fi } B \in \mathcal{A}.$$

Dacă şi $f^+ \in \mathcal{L}^1_+(X)$ atunci ν_f ia valori în $\mathbb{R}$; în acest caz funcţia f este integrabilă pe X. Am notat cu $\mathcal{L}^1(X)$ spaţiul vectorial al funcţiilor integrabile pe X. Am arătat în teorema 3.4.14, punctul 4), că integrala Lebesgue este numărabil aditivă în raport cu domeniul de integrare; rezultă că ν_f este o funcţie de mulţime numărabil aditivă. Acest exemplu justifică extinderea noţiunii de măsură.

6.1.1 Definiţie. Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$; ν se numeşte **măsură reală** dacă verifică:

1). $\nu(\emptyset) = 0$,

2). $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n)$, pentru orice şir $(B_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ format din mulţimi disjuncte două câte două.

Rezultatele din acest capitol sunt valabile şi pentru măsuri care iau valori în $[-\infty, +\infty)$.

O măsură ν care ia valori în $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ se numeşte măsură reală **finită**. ν se numeşte **σ-finită** dacă există o partiţie numărabilă a lui X, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, aşa fel încât $\nu(X_n) \in \mathbb{R}$, oricare ar $n \in \mathbb{N}$.

Aşa cum am observat mai sus, oricare ar fi $f \in \mathcal{M}(X)$ cu $f^- \in \mathcal{L}^1_+(X)$, $\nu_f : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ definită prin $\nu_f(B) = \int_B f d\mu$, este o măsură reală; se va spune că ν_f este **măsura generată de funcţia** f. Dacă $f \in \mathcal{L}^1(X)$ atunci ν_f este o măsură reală finită.

O măsură reală păstrează unele dintre proprietăţile unei măsuri pozitive (vezi teorema 1.4.7):

6.1.2 Propoziţie. *Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală; atunci:*

1). ν este finit aditivă:
$\nu(B \cup C) = \nu(B) + \nu(C), \forall B, C \in \mathcal{A}$ *cu* $B \cap C = \emptyset$.

2). ν este substractivă:
$\nu(B \setminus C) = \nu(B) - \nu(C), \forall B, C \in \mathcal{A}$ *cu* $C \subseteq B$ *şi* $\nu(C) < +\infty$.

3). ν este continuă pe şiruri crescătoare:
$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \nu(B_n)$, $\forall (B_n)_n \subseteq \mathcal{A}$, *şir crescător.*

4). ν este continuă pe şiruri descrescătoare:
$\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \nu(B_n)$, $\forall (B_n)_n \subseteq \mathcal{A}$, *şir descrescător cu* $\nu(B_1) < +\infty$.

Demonstraţie. 1). Fie $B_1 = B, B_2 = C$ şi $B_n = \emptyset$, pentru orice $n \geq 3$; atunci $\nu(B \cup C) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) = \nu(B) + \nu(C) + \nu(\emptyset) + \cdots + \nu(\emptyset) + \cdots = \nu(B) + \nu(C)$.

2). $B = (B \setminus C) \cup C$; folosind finita aditivitate a lui ν rezultă că $\nu(B) = \nu(B \setminus C) + \nu(C)$ şi cum $\nu(C) < +\infty$, $\nu(B \setminus C) = \nu(B) - \nu(C)$.

3). Fie $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ aşa fel încât $\nu(B_{n_0}) = +\infty$, atunci, oricare ar fi $n > n_0$, $\nu(B_n) = \nu(B_n \setminus B_{n_0}) + \nu(B_{n_0}) = +\infty$ şi deci $\nu(B) = \nu(B \setminus B_{n_0}) + \nu(B_{n_0}) = +\infty = \lim_n \nu(B_n)$.

Să presupunem acum că $\nu(B_n) < +\infty$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci din $B = B_1 \cup (B_2 \setminus B_1) \cup \cdots \cup (B_n \setminus B_{n-1}) \cdots$, rezultă că $\nu(B) = \nu(B_1) + \nu(B_2 \setminus B_1) + \cdots + \nu(B_n \setminus B_{n-1}) + \cdots = \nu(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [\nu(B_n) - \nu(B_{n-1})] = \nu(B_1) + \lim_n \sum_{k=2}^{n} [\nu(B_k) - \nu(B_{k-1})] = \lim_n \nu(B_n)$.

4). Fie $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$; deoarece $\nu(B_1) = \nu(B_1 \setminus B_n) + \nu(B_n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\nu(B_1) = \nu(B_1 \setminus B) + \nu(B)$, rezultă că $\nu(B) < +\infty$ şi $\nu(B_n) < +\infty$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul $(B_1 \setminus B_n)_n$ este crescător şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \setminus B_n) = B_1 \setminus B$. Folosind proprietăţile 2) şi 3), $\nu(B_1) - \nu(B) = \nu(B_1 \setminus B) = \lim_n \nu(B_1 \setminus B_n) = \nu(B_1) - \lim_n \nu(B_n)$ de unde rezultă proprietatea de continuitate pe şiruri descendente. ∎

6.1.3 Observaţie. Măsurile reale nu verifică toate proprietăţile măsurilor pozitive din teorema 1.4.7.

Astfel, în general, o măsură reală nu este monotonă. Într-adevăr, fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1] \\ -1 & , x \in (1, 2] \end{cases}$; $f \in \mathcal{L}^1([0, 2])$ şi măsura finită generată de ea este definită prin $\nu_f(B) = \lambda(B \cap [0, 1]) - \lambda(B \cap (1, 2])$, oricare ar fi $B \in \mathcal{L}([0, 2])$ (vezi definiţia 6.1.1). Mulţimea $[0, 1] \in \mathcal{L}([0, 2])$, $\nu_f([0, 1]) = 1$ dar $\nu_f([0, 2]) = 0$.

Proprietatea de finită subaditivitate (şi deci şi aceea de numărabilă subaditivitate) nu este de asemenea verificată de măsurile reale. Pentru funcţia f de mai sus să considerăm mulţimile măsurabile $B = (\frac{2}{3}, 2]$ şi $C = [0, \frac{3}{2})$; atunci $\nu_f(B \cup C) = \nu_f([0, 2]) = 0 > -\frac{1}{6} = \nu_f(B) + \nu_f(C)$.

6.1.4 Definiţie. Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală. O mulţime $B \in \mathcal{A}$ se numeşte mulţime **ν-pozitivă** (**ν-negativă**) dacă, oricare ar fi $C \in \mathcal{A}(B)$ ($C \in \mathcal{A}$ şi $C \subseteq B$), $\nu(C) \geq 0$ (respectiv $\nu(C) \leq 0$). Dacă B este ν-pozitivă (ν-negativă), atunci $\nu(B) \geq 0$ ($\nu(B) \leq 0$).
Mulţimea $B \in \mathcal{A}$ se numeşte **ν-nulă** dacă este atât ν-pozitivă cât şi ν-negativă. B este ν-nulă dacă şi numai dacă $\nu(C) = 0$, oricare ar fi $C \in \mathcal{A}(B)$. Dacă ν este o măsură pozitivă atunci ea este monotonă şi deci B este ν-nulă dacă şi numai dacă $\nu(B) = 0$.

6.1.5 Exemplu. Fie $f \in \mathcal{M}(X)$ cu $f^- \in \mathcal{L}^1_+(X)$ şi fie ν_f măsura generată de funcţia f. Mulţimea $X^+ = (f \geq 0)$ este ν_f-pozitivă, $X^- = (f \leq 0)$ este ν_f-negativă iar $(f = 0)$ este ν_f-nulă. Reamintim că $(f \geq 0) = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$; $(f \leq 0)$ şi $(f = 0)$ se definesc în mod asemănător.

În plus, X^+ este o mulţime maximală cu proprietatea menţionată în sensul că, oricare ar altă mulţime ν_f-pozitivă $B \in \mathcal{A}$, $\nu_f(B \setminus X^+) = 0$. Într-adevăr, deoarece $B \setminus X^+ \in \mathcal{A}, B \setminus X^+ \subseteq B$, $\nu_f(B \setminus A^+) \geq 0$; dacă am presupune $\nu_f(B \setminus A^+) > 0$ atunci

$$0 < \nu_f(B \setminus A^+) = \int_{B \setminus A^+} f d\mu = \int_{B \setminus A^+} (-f^-) d\mu \leq 0,$$

ceea ce este absurd. Se poate chiar observa că $B \setminus A^+$ este mulţime ν_f-nulă.

O proprietate de maximalitate asemănătoare putem formula şi pentru mulţimea X^-: pentru orice mulţime ν_f-negativă $B \in \mathcal{A}, \nu_f(B \setminus X^-) = 0$.

6.1.6 Propoziţie. *Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală şi fie $E \in \mathcal{A}$ cu $\nu(E) < 0$. Există atunci o mulţime $F \in \mathcal{A}(E)$ ($F \subseteq E$ şi $F \in \mathcal{A}$), F mulţime ν-negativă astfel încât $\nu(F) < 0$.*

Demonstraţie. Dacă E este ν-negativă atunci mulţimea $F = E$ verifică concluzia propoziţiei.

Să presupunem că E nu este ν-negativă; atunci E are submulţimi de măsură strict pozitivă. Fie n_1 cel mai mic număr natural pentru care există $E_1 \in \mathcal{A}(E)$ cu $\nu(E_1) \geq \frac{1}{n_1}$. Dacă $E \setminus E_1$ este ν-negativă considerăm $F = E \setminus E_1$. Deoarece $\nu(E) = \nu(E_1) + \nu(F) < 0$, rezultă că $\nu(F) < 0$ şi deci F verifică concluzia.

Dacă $E \setminus E_1$ nu este ν-negativă atunci va conţine submulţimi cu măsură strict pozitivă. Fie atunci n_2 cel mai mic număr natural pentru care există $E_2 \in \mathcal{A}(E \setminus E_1)$ cu $\nu(E_2) \geq \frac{1}{n_2}$ ş.a.m.d.

Dacă $F_k = E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{k-1})$ este ν-negativă atunci $F = F_k$ verifică concluzia. Dacă F_k nu este ν-negativă atunci are submulţimi de măsură strict pozitivă, şi considerăm n_k cel mai mic număr natural pentru care există $E_k \in \mathcal{A}(F_k)$ cu $\nu(E_k) \geq \frac{1}{n_k}$, ş.a.m.d.

Dacă prin construcţia de mai sus nu se produce o soluţie F a problemei după un număr finit de paşi, atunci considerăm $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_k = E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \right)$. Deoarece $0 > \nu(E) > -\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_k) \geq 0$ şi $\nu(E) = \nu(F) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_k)$, rezultă că $\nu(F) \in (-\infty, 0)$ şi deci că $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) < +\infty$. Pentru orice $k \geq 1$, $\frac{1}{n_k} \leq \nu(E_k)$, de unde $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < +\infty$ şi deci $n_k \to +\infty$.

Să arătăm că F verifică concluzia propoziţiei.

Presupunem că F nu este ν-negativă; fie atunci $G \in \mathcal{A}(F)$ astfel încât $\nu(G) > 0$. Atunci există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\nu(G) > \frac{1}{N}$ şi deci există $k \in \mathbb{N}$ cu $N < n_k$. Faptul că $G \subseteq F_k = E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{k-1})$ şi $\nu(G) > \frac{1}{N}$ contrazice proprietatea lui n_k de a fi cel mai mic număr natural pentru care exsită $E_k \subseteq F_k$ cu $\nu(E_k) \geq \frac{1}{n_k}$.

Deci mulţimea F este ν-negativă şi, cum $\nu(F) < 0$, ea verifică concluzia propoziţiei. ∎

Propoziţia precedentă îsi dovedeşte utilitatea în demonstraţia teoremei de descompunere a lui Hahn.

6.1.7 Teoremă (teorema de descompunere lui Hahn).
Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală; există două mulţimi $E, F \in \mathcal{A}$, E ν-negativă, F ν-pozitivă astfel încât $X = E \cup F$ şi $E \cap F = \emptyset$.

Oricare ar fi o altă pereche de mulţimi E', F' cu aceleaşi proprietăţi, mulţimea $E \Delta E' = F \Delta F'$ este ν-nulă.

Demonstraţie. Fie $a = \inf\{\nu(B) : B \in \mathcal{A}, B\ \nu\text{-negativă}\}$ şi fie un şir de mulţimi ν-negative $(B_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ aşa fel încât $\nu(B_n) \downarrow a$. Vom nota $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ şi vom considera $(C_n)_{n\geq 1}$ şirul disjunct asociat lui $(B_n)_{n\geq 1}$: $C_1 = B_1, C_n = B_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}), \forall n \geq 2$. Şirul $(C_n)_{n\geq 1}$ este format din mulţimi ν-negative disjuncte două câte două şi $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Oricare ar fi $C \in \mathcal{A}(E), \nu(C) = \nu(C \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C \cap C_n) \leq 0$. Deci E este ν-negativă. Atunci, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*, \nu(E \setminus B_n) \leq 0$ şi deci $\nu(E) = \nu(B_n) + \nu(E \setminus B_n) \leq \nu(B_n)$. Trecând la limită pentru $n \to +\infty$ obţinem $\nu(E) \leq \lim_n \nu(B_n) = a$. Din modul în care a fost definit a rezultă că $\nu(E) = a$.

Fie $F = A \setminus E$; dacă presupunem că F nu este ν-pozitivă, atunci există $B \in \mathcal{A}(F)$ aşa ca $\nu(B) < 0$. Folosim acum propoziţia 6.1.6; există deci $C \in \mathcal{A}(B)$ ν-negativă aşa ca $\nu(C) < 0$. Atunci $E \cup C$ este ν-negativă şi $\nu(E \cup C) = \nu(E) + \nu(C) = a + \nu(C) < a$ ceea ce contrazice definiţia lui a.

Deci F este ν-pozitivă şi astfel perechea de mulţimi E, F verifică concluzia teoremei.

Fie acum E', F' o altă pereche de mulţimi, E' ν-negativă, F' ν-pozitivă, $X = E' \cup F'$ şi $E' \cap F' = \emptyset$.

Evident $E \setminus E' = F^c \setminus (F')^c = F^c \cap F' = (F') \setminus F$ ($F^c = X \setminus F$ - complementara lui F). Oricare ar fi $B \in \mathcal{A}, B \subseteq E \setminus E' = (F') \setminus F, \nu(B) \leq 0$ (E este ν-negativă) şi $\nu(B) \geq 0$ (F' este ν-pozitivă). Rezultă că $\nu(B) = 0$. Similar $F \setminus F' = (E') \setminus E$ şi, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}, B \subseteq F \setminus F' = (E') \setminus E$, $\nu(B) = 0$. Deci $E \Delta E' = F \Delta F'$ este o mulţime ν-nulă. ∎

6.1.8 Definiţie. Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală; o pereche de mulţimi din $\mathcal{A}$, (E, F), se numeşte o **descompunere Hahn** a mulţimii X în raport cu ν dacă E este ν-negativă, F este ν-pozitivă, $X = E \cup F$ şi $E \cap F = \emptyset$.
Teorema precedentă ne-a arătat că o mulţime X admite descompuneri Hahn în raport cu orice măsură reală ν; orice două descompuneri coincid cu excepţia unor mulţimi ν-nule.

Fie $f \in \mathcal{M}(X)$ cu $f^- \in \mathcal{L}^1_+(X)$; aşa cum am observat în exemplul 6.1.5, o descompunere Hahn a lui X în raport cu măsura ν_f generată de f este (X^-, X^+), unde $X^- = (f < \underline{0}) = \{x \in X : f(x) < 0\}$ iar $X^+ = (f \geq \underline{0}) = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$.

6.1.9 Definiţie. Fie $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ două măsuri reale; ν_1 şi ν_2 se numesc **singulare** sau **ortogonale** dacă există o mulţime ν_1-nulă, $E \in \mathcal{A}$, aşa fel încât $E^c = X \setminus E$ este ν_2-nulă. Vom nota această situaţie cu $\nu_1 \perp \nu_2$. Dacă ν_1 şi ν_2 sunt măsuri pozitive atunci $\nu_1 \perp \nu_2$ dacă şi numai dacă există $E \in \mathcal{A}$ aşa fel încât $\nu_1(E) = 0 = \nu_2(X \setminus E)$.

Fie $f, g \in \mathcal{M}_+(X)$ astfel încât $f = \underline{0}$ a.p.t. pe $E \in \mathcal{A}$ şi $g = \underline{0}$ a.p.t. pe $X \setminus E$; atunci $\nu_f \perp \nu_g$, unde ν_f şi ν_g sunt măsurile reale generate de f respectiv g.

Următoarea teoremă ne permite să descompunem orice măsură reală într-o diferenţă de măsuri pozitive.

6.1.10 Teoremă (teorema de descompunere a lui Jordan).
Pentru orice măsură reală $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ există două măsuri pozitive, $\nu^+, \nu^- : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, astfel încât $\nu = \nu^+ - \nu^-$ şi $\nu^+ \perp \nu^-$.

Această descompunere este unică.

Demonstraţie. Fie (E, F) o descompunere Hahn a mulţimii X în raport cu ν; E este ν-negativă, F este ν-pozitivă, $X = E \cup F$ şi $E \cap F = \emptyset$. Definim $\nu^+, \nu^- : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ prin $\nu^+(B) = \nu(F \cap B), \nu^-(B) = -\nu(E \cap B)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$. Este uşor de observat că ν^+, ν^- sunt măsuri pozitive pe X, ν^- este finită şi că, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$, $\nu^+(B) - \nu^-(B) = \nu(F \cap B) + \nu(E \cap B) = \nu((E \cup F) \cap B) = \nu(B)$.

În plus, $\nu^+(E) = \nu(F \cap E) = 0 = -\nu(E \cap F) = \nu^-(F) = \nu^-(X \setminus E)$; deci $\nu^+ \perp \nu^-$.

Fie acum $\nu = \nu_1 - \nu_2$ o altă descompunere a lui ν ca diferenţă de măsuri pozitive singulare. Deoarece $\nu_1 \perp \nu_2$, există $E_1 \in \mathcal{A}$ astfel încât $\nu_1(E_1) = \nu_2(X \setminus E_1) = 0$. Atunci $(E_1, X \setminus E_1)$ este o altă descompunere Hahn a lui

X în raport cu ν. Într-adevăr, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}(E_1), \nu(B) = \nu_1(B) - \nu_2(B) = 0 - \nu_2(B) \leq 0$ (ν_1 este măsură pozitivă şi deci este monotonă: $0 \leq \nu_1(B) \leq \nu_1(E_1) = 0$). Deci E_1 este ν-negativă. În mod asemănător se arată că $X \setminus E_1$ este ν-pozitivă. Conform teoremei 6.1.7, $E\Delta E_1 = F\Delta F_1$ este o mulţime ν-nulă (am notat $F_1 = X \setminus E_1$). Atunci, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$, $\nu((F \setminus F_1) \cap B) = 0 = \nu((F_1 \setminus F) \cap B)$ de unde

$$\nu^+(B) = \nu(F \cap B) = \nu((F \setminus F_1) \cap B) + \nu((F \cap F_1) \cap B) =$$

$$= \nu((F_1 \cap F) \cap B) = \nu((F_1 \cap F) \cap B) + \nu((F_1 \setminus F) \cap B) =$$

$$= \nu(F_1 \cap B) = \nu_1(F_1 \cap B) - \nu_2(F_1 \cap B) = \nu_1(F_1 \cap B) = \nu_1(B).$$

Similar se arată că $\nu^-(B) = \nu_2(B)$. ■

6.1.11 Definiţie. Măsurile pozitive singulare ν^+, ν^- cu proprietatea că $\nu = \nu^+ - \nu^-$ formează **descompunerea Jordan** a măsurii ν; aplicaţia $|\nu| : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, definită prin $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, este o măsură pozitivă care se numeşte **variaţia totală** a măsurii ν.

Fie $f \in \mathcal{M}(X)$ cu $f^- \in \mathcal{L}^1_+(X)$; o descompunere Hahn a lui X în raport cu măsura ν_f generată de f este (X^-, X^+), unde $X^- = (f < \underline{0}) = \{x \in X : f(x) < 0\}$ iar $X^+ = (f \geq \underline{0}) = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ (vezi definiţia 6.1.8). Să observăm că $x \in X^+$ dacă şi numai dacă $f(x) = \sup\{f(x), 0\} = f^+(x)$; deci $X^+ = \{x \in X : f(x) = f^+(x)\}$. Atunci, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$, $\nu_f^+(B) = \nu_f(X^+ \cap B) = \int_{X^+ \cap B} f d\mu = \int_B f^+ d\mu$. Similar, $\nu_f^-(B) = \int_B f^- d\mu$. Rezultă că ν_f^+ este măsura generată de f^+ şi ν_f^- este măsura generată de f^-. Variaţia totală a lui $\nu_f = \nu_f^+ + \nu_f^-$ va fi măsura pozitivă generată de $f^+ + f^- = |f|$.

Explicaţia denumirii de variaţie totală o găsim în următoarea teoremă.

6.1.12 Teoremă. *Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală; variaţia totală a lui ν, $|\nu|$, are următoarele proprietăţi:*

1). $|\nu|(B) = \sup\{\sum_{k=1}^n |\nu(B_k)| : n \in \mathbb{N}^*, \{B_1, \ldots, B_n\} \in \Pi_B\}$, unde Π_B notează familia tuturor partiţiilor finite ale lui B cu elemente din $\mathcal{A}$.

2). $\sup\{|\nu(C)| : C \in \mathcal{A}(B)\} \leq |\nu|(B) \leq 2 \cdot \sup\{|\nu(C)| : C \in \mathcal{A}(B)\}$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$.

3). $|\nu|$ este cea mai mică dintre măsurile pozitive μ care au proprietatea că $|\nu(B)| \leq \mu(B)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$.

Demonstraţie. 1). Fie $\{B_1, \ldots, B_n\} \in \Pi_B$ arbitrară; atunci

$$(*) \qquad |\nu|(B) = \sum_{k=1}^{n} |\nu|(B_k) = \sum_{k=1}^{n} [\nu^+(B_k) + \nu^-(B_k)] \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} |\nu^+(B_k) - \nu^-(B_k)| = \sum_{k=1}^{n} |\nu(B_k)|.$$

Pe de altă parte, dacă (E, F) este o descompunere Hahn a lui X în raport cu ν, atunci $\{E \cap B, F \cap B\} \in \Pi_B$ şi

$$|\nu(E \cap B)| + |\nu(F \cap B)| = -\nu(E \cap B) + \nu(F \cap B) = \nu^-(B) + \nu^+(B) = \nu(B).$$

Rezultă că

$$|\nu|(B) \leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(B_k)| : n \in \mathbb{N}^*, \{B_1, \ldots, B_n\} \in \Pi_B \right\}$$

ceea ce, în baza inegalităţii $(*)$, demonstrază egalitatea de la 1).

2). Oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$ şi $C \in \mathcal{A}(B), \{C, B \setminus C\} \in \Pi_B$ şi deci

$$|\nu|(B) \geq |\nu(C)| + |\nu(B \setminus C)| \geq |\nu(C) + \nu(B \setminus C)| = |\nu(C)|.$$

Deci $\sup\{|\nu(C)| : C \in \mathcal{A}(B)\} \leq |\nu|(B)$.

Dacă (E, F) este o descompunere Hahn a lui X atunci

$$|\nu|(B) = \nu^+(B) + \nu^-(B) = \nu(B \cap F) - \nu(B \cap E) =$$

$$= |\nu(B \cap E)| + |\nu(B \cap F)| \leq 2 \cdot \sup\{|\nu(C)| : C \in \mathcal{A}(B)\}.$$

3). Utilizând prima inegalitate de la punctul precedent, rezultă că $|\nu|$ este o măsură pozitivă a.î. $|\nu(B)| \leq |\nu|(B)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$.

Fie acum $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ o măsură pozitivă arbitrară cu proprietatea că $|\nu(B)| \leq \mu(B)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$ şi fie (E, F) o descompunere Hahn a lui X. Atunci, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$,

$$|\nu|(B) = \nu(B \cap F) - \nu(B \cap E) = |\nu(B \cap E)| + |\nu(B \cap F)| \leq$$

$$\leq \mu(B \cap E) + \mu(B \cap F) = \mu(B).$$

Deci $|\nu| \leq \mu$. ■

6.1.13 Observaţie. Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală şi fie $|\nu|$ variaţia totală a ei. Atunci o mulţime $B \in \mathcal{A}$ este ν-nulă dacă şi numai dacă $|\nu|(B) = 0$. Într-adevăr, conform definiţiei 6.1.4, B este ν-nulă dacă şi numai dacă $\nu(C) = 0$, pentru orice $C \in \mathcal{A}(B)$, ceea ce este echivalent cu $\sup\{|\nu(C)| : C \in \mathcal{A}(B)\} = 0$. Punctul 2) al teoremei precedente ne arată că aceasta revine la $|\nu|(B) = 0$.

6.2 Teorema Radon-Nikodym

Fie $f \in \mathcal{M}(X)$ cu $f^- \in \mathcal{L}^1_+(X)$ şi fie $\nu_f : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ măsura generată de funcţia f; am definit $\nu_f(B) = \int_B f d\mu$ şi am observat în definiţia 6.1.11 că $|\nu_f|(B) = \int_B |f| d\mu$. Punctul (ii) al teoremei 3.4.8 ne asigură că, dacă $\mu(B) = 0$, atunci $|\nu_f|(B) = 0$ adică, conform observaţiei 6.1.13, B este mulţime ν_f-nulă. Vom arăta în acest paragraf că această proprietate caracterizează măsurile generate de funcţii măsurabile: orice măsură reală a cărei variaţie totală se anulează pe mulţimile μ-nule este generată de o funcţie măsurabilă.

6.2.1 Definiţie. Fie $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ o măsură reală; ν se numeşte măsură **absolut continuă în raport cu măsura** μ dacă, pentru orice $B \in \mathcal{A}$ cu $\mu(B) = 0$, $|\nu|(B) = 0$. Vom nota în această situaţie $\nu \ll \mu$.

6.2.2 Propoziţie. *$\nu \ll \mu$ dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ a.î., oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$ cu $\mu(B) < \delta$, $|\nu(B)| < \varepsilon$.*

Demonstraţie. Suficienţa. Presupunem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ a.î., oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$ cu $\mu(B) < \delta$, $|\nu(B)| < \varepsilon$ şi fie $B \in \mathcal{A}$ cu $\mu(B) = 0$. Oricare ar fi $C \in \mathcal{A}(B)$, $\mu(C) = 0 < \delta$; atunci $|\nu(C)| < \varepsilon$. Deoarece ε este arbitrar, rezultă că $\nu(C) = 0$. Astfel B este ν-nulă şi deci $|\nu|(B) = 0$ (vezi observaţia 6.1.13).

Necesitatea. Vom raţiona prin reducere la absurd; presupunem că $\nu \ll \mu$ şi că există $\varepsilon_0 > 0$ aşa fel încât, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, există $B_k \in \mathcal{A}$ cu $\mu(B_k) < \frac{1}{2^k} = \delta$ şi $|\nu|(B_k) \geq |\nu(B_k)| \geq \varepsilon_0$. Fie $B = \limsup_n B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$; oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Rezultă că $\mu(B) = 0$ şi, conform ipotezei, $|\nu|(B) = 0$. Pe de altă parte, din punctul 9) al teoremei 1.4.7, $|\nu|(B) = |\nu|(\limsup_n B_n) \geq \limsup_n |\nu|(B_n) \geq \varepsilon_0$, ceea ce reprezintă o contradicţie. ∎

6.2.3 Observaţii. (i) Din propoziţia precedentă putem afirma că proprietatea unei măsuri ν de a fi absolut continuă în raport cu μ este, aşa cum îi sugerează şi denumirea, efectiv o proprietate de continuitate; vom putea scrie $\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \lim_{\mu(B) \to 0} \nu(B) = 0$.

(ii) Din definiţie rezultă că $\nu \ll \mu \Longleftrightarrow |\nu| \ll \mu \Longleftrightarrow \begin{cases} \nu^+ \ll \mu, \\ \nu^- \ll \mu. \end{cases}$

(iii) Atât din definiţie cât şi din teorema 3.4.14 se observă că, dacă ν_f este măsura generată de funcţia măsurabilă f, atunci $\nu_f \ll \mu$. Vom arăta că şi reciproca este adevărată.

6.2.4 Teoremă (teorema Radon-Nikodym). *Fie $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ o măsură reală finită absolut continuă în raport cu măsura pozitivă şi σ-finită μ. Atunci există o funcţie integrabilă $f \in \mathcal{L}^1(X)$ astfel încât $\nu = \nu_f$ sau*

$$\nu(B) = \int_B f d\mu, \text{ oricare ar fi } B \in \mathcal{A}.$$

Funcţia f este unic determinată până la o mulţime de μ-măsură nulă.

Demonstraţie. Existenţa. Vom face demonstraţia în mai multe etape. 1). Presupunem că ν este o măsură pozitivă finită şi că $\mu(X) < +\infty$. Fie

$$\mathcal{F} = \left\{ g \in \mathcal{L}^1_+(X) : \int_B g d\mu \leq \nu(B), \text{ oricare ar fi } B \in \mathcal{A} \right\}.$$

Deoarece $\underline{0} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Fie $L = \sup\{\int_X g d\mu : g \in \mathcal{F}\} \leq \nu(X) < +\infty$ şi fie $(g_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ aşa fel încât $\int_X g_n d\mu \uparrow L$.

Putem presupune că şirul $(g_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Într-adevăr, putem construi şirul $(h_n)_{n\geq 1}$, definind $h_n = \max\{g_1, \ldots, g_n\}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $(h_n)_{n\geq 1}$ este evident crescător. Să arătăm prin inducţie că $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$. $h_1 = g_1 \in \mathcal{F}$. Presupunem că $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{F}$; $h_{n+1} = \max\{g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}\} = \max\{h_n, g_{n+1}\}$. Fie $C = (h_n \geq g_{n+1}) \in \mathcal{A}$; atunci, deoarece $h_n, g_{n+1} \in \mathcal{F}$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$,

$$\int_B h_{n+1} d\mu = \int_{B\cap C} h_n d\mu + \int_{B\setminus C} g_{n+1} d\mu \leq \nu(B \cap C) + \nu(B \setminus C) = \nu(B).$$

Rezultă că $h_{n+1} \in \mathcal{F}$; deci $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$. Deoarece $g_n \leq h_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_X g_n d\mu \leq \int_X h_n d\mu$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$; astfel $\int_X h_n d\mu \uparrow L$. Deci şirul $(h_n)_n$ poate lua locul şirului $(g_n)_n$. Putem astfel presupune de la început că $(g_n)_n$ este crescător.

Fie $A = \{x \in X : \lim_n g_n(x) = +\infty\} = \{x \in X : \sup_n g_n(x) = +\infty\}$; observăm că $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (g_n > k) \in \mathcal{A}$. Dacă presupunem că $\mu(A) = a > 0$, atunci, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$ există $n_k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\mu(g_{n_k} > k) \geq a$ şi atunci

$$k \cdot a \leq k \cdot \mu(g_{n_k} > k) \leq \int_{(g_{n_k} > k)} g_{n_k} d\mu \leq \int_X g_{n_k} d\mu \leq L, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}^*,$$

ceea ce este absurd. Deci $\mu(A) = 0$ şi, deoarece $\nu \ll \mu$, $\nu(A) = 0$.

Fie atunci $f : X \to \mathbb{R}_+$, definită prin $f(x) = \begin{cases} \lim_n g_n(x) & , x \in X \setminus A, \\ 0 & , x \in A. \end{cases}$

Funcţia f este măsurabilă (vezi şi exerciţiul 4 de la 2.5) şi pozitivă şi, pe mulţimea $X \setminus A$, $g_n \uparrow f$. Folosind teorema convergenţei monotone pe $X \setminus A$ obţinem $\int_{X\setminus A} g_n d\mu \uparrow \int_{X\setminus A} f d\mu \leq L$. Pe de altă parte, utilizând teorema 3.4.8, $\int_A f d\mu = 0 = \int_A g_n d\mu$. Rezultă că $f \in \mathcal{L}^1_+(X)$ şi $\int_X g_n d\mu \uparrow \int_X f d\mu$. Deci $\int_X f d\mu = L$.

Folosind iar teorema convergenţei monotone pe $B \setminus A$, obţinem:

$$\int_B f d\mu = \int_{B\setminus A} f d\mu = \lim_n \int_{B\setminus A} g_n d\mu \leq \nu(B \setminus A) = \nu(B), \forall B \in \mathcal{A}.$$

Deci $f \in \mathcal{F}$.

Vom demonstra că f este funcţia căutată.

Să presupunem că există $B_0 \in \mathcal{A}$ aşa fel încât $\int_{B_0} f d\mu < \nu(B_0)$. Observăm că $\mu(B_0) > 0$ (dacă presupunem că $\mu(B_0) = 0$ atunci şi $\nu(B_0) = 0$ şi inegalitatea strictă de mai sus nu ar putea avea loc).
Atunci există $\varepsilon > 0$ aşa fel încât

$$\theta(B_0) = \nu(B_0) - \int_{B_0} f d\mu - \varepsilon \cdot \mu(B_0) > 0.$$

Definim $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, prin

$$\theta(B) = \nu(B) - \int_B f d\mu - \varepsilon \cdot \mu(B), \text{ oricare ar fi } B \in \mathcal{A}.$$

Se observă imediat că θ este o măsură reală şi $\theta(B_0) > 0$. Teorema lui Hahn ne asigură existenţa a două mulţimi $E, F \in \mathcal{A}, E \cap F = \emptyset, X = E \cup F$ aşa fel încât E este θ-negativă şi F este θ-pozitivă.

Deoarece $0 < \theta(B_0) = \theta(B_0 \cap E) + \theta(B_0 \cap F)$, rezultă că $\theta(B_0 \cap F) > 0$ şi deci $\theta(F) > 0$.

Pentru orice $B \in \mathcal{A}$, $\theta(B \cap F) \geq 0$ deci

$$\int_{B\cap F} f d\mu + \varepsilon \cdot \mu(B \cap F) \leq \nu(B \cap F).$$

Atunci

$$\int_B (f + \varepsilon \cdot \chi_F) d\mu = \int_B f d\mu + \varepsilon \cdot \mu(B \cap F) =$$

$$= \int_{B\setminus F} f d\mu + \int_{B\cap F} f d\mu + \varepsilon \cdot \mu(B \cap F) \leq \nu(B \setminus F) + \nu(B \cap F) = \nu(B).$$

Rezultă că $f + \varepsilon \cdot \chi_F \in \mathcal{F}$ şi deci

$$L \geq \int_X (f + \varepsilon \cdot \chi_F) d\mu = \int_X f d\mu + \varepsilon \cdot \mu(F) = L + \varepsilon \cdot \mu(F).$$

Din relaţia de mai sus $\mu(F) = 0$ şi, cum $\nu \ll \mu$, $\nu(F) = 0$. Rezultă că $\theta(F) = 0$ ceea ce contrazice $\theta(F) > 0$.

Contradicţia la care am ajuns arată că ipoteza că există $B_0 \in \mathcal{A}$ aşa fel încât $\int_{B_0} f d\mu < \nu(B_0)$ este falsă.

Deci, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}, \nu(B) = \int_B f d\mu$ ceea ce arată că funcţia f verifică concluzia teoremei: $\nu = \nu_f$.

2). Să considerăm acum cazul în care ν este o măsură finită pozitivă iar μ este măsură pozitivă σ-finită. Fie $(X_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ un şir crescător de mulţimi aşa fel încât $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ şi $\mu(X_n) < +\infty$, oricare ar fi $n \geq 1$. Oricare ar fi $n \geq 1$, definim $\mu_n, \nu_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ prin $\mu_n(B) = \mu(B \cap X_n)$ şi $\nu_n(B) = \nu(B \cap X_n)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$. Deoarece, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\nu_n \ll \mu_n$ putem aplica punctul precedent al demonstraţiei şi găsim funcţiile f_n pozitive şi μ_n-integrabile pe X aşa fel încât

$$\nu_n(B) = \int_B f_n d\mu_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^* \text{ şi oricare ar fi } B \in \mathcal{A}.$$

Să observăm că $\mu_n(B) = \mu(B)$ şi $\nu_n(B) = \nu(B)$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}, B \subseteq X_n$ şi $\nu_n(B) = \mu_n(B) = 0$, oricare ar fi $B \subseteq X \setminus X_n$; rezultă că, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}, B \subseteq X_n \subseteq X_{n+1}$,

$$\int_B (f_{n+1} - f_n) d\mu = \int_B f_{n+1} d\mu_{n+1} - \int_B f_n d\mu_n =$$

$$= \nu_{n+1}(B) - \nu_n(B) = \nu(B) - \nu(B) = 0.$$

Datorită punctului c) al teoremei 3.4.9, $f_n = f_{n+1}$ a.p.t. pe mulţimea B_n. De asemenea orice funcţie μ_n-integrabilă este μ-integrabilă (vezi exerciţiul 28 de la 3.7). Rezultă că $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{L}^1_+(X)$.

Definim atunci în mod consistent $f : X \to \mathbb{R}$ prin $f(x) = f_n(x)$, dacă $x \in B_n$. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, f^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{A}$. Rezultă că funcţia astfel definită este măsurabilă şi pozitivă. Folosind proprietatea de continuitate a măsurilor pe şiruri ascendente (vezi punctul 6) al teoremei 1.4.7) obţinem, pentru orice $B \in \mathcal{A}$,

$$\int_B f d\mu = \lim_n \int_{B\cap X_n} f d\mu = \lim_n \int_{B\cap X_n} f_n d\mu_n = \lim_n \nu_n(B \cap X_n) =$$

$$= \lim_n (B \cap X_n) = \nu(B).$$

În particular $\int_X f d\mu = \nu(X) < +\infty$ şi deci $f \in \mathcal{L}^1_+(X)$.

3). Fie acum ν o măsură reală finită oarecare absolut continuă în raport cu măsura pozitivă şi σ-finită μ. Fie $\nu + \nu^+ - \nu^-$ descompunerea Jordan a măsurii ν. Din punctul (ii) al observaţiei 6.2.3 rezultă că $\nu^+ \ll \mu$ şi $\nu^- \ll \mu$. Putem aplica acum cazul precedent al demonstraţiei: există $g, h \in \mathcal{L}^1_+(X)$ aşa fel încât

$$\nu^+(B) = \int_B g d\mu \text{ şi } \nu^-(B) = \int_B h d\mu, \text{ oricare ar fi } B \in \mathcal{A}.$$

Funcţia $f = g - h$ este integrabilă în raport cu μ şi verifică concluzia teoremei.

Unicitatea. Să presupunem că există două funcţii $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(X)$ aşa fel încât, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$,

$$\nu(B) = \int_B f_1 d\mu = \int_B f_2 d\mu.$$

Atunci $\int_B (f_1 - f_2) d\mu = 0$, oricare ar fi $B \in \mathcal{A}$. Teorema 3.4.9 ne asigură atunci că $f_1 = f_2$, μ-a.p.t. ■

6.2.5 Observaţii. (i) Teorema se poate extinde cu uşurinţă la cazul în care ν este o măsură reală σ-finită absolut continuă în raport cu măsura pozitivă şi σ-finită μ; în acest caz însă funcţia f va avea integrală, fără a fi în mod necesar integrabilă.

(ii) Dacă ţinem cont de punctul (iii) al observaţiei 6.2.3 şi de teorema Radon-Nikodym, putem afirma că, dacă ν este o măsură reală finită, atunci $\nu \ll \mu$ dacă şi numai dacă există $f \in \mathcal{L}^1(X)$ aşa fel încât $\nu = \nu_f$.

6.2.6 Definiţie. Funcţia $f \in \mathcal{L}^1(X)$ a cărei existenţă a fost probată în teorema Radon-Nikodym se numeşte **derivata Radon-Nikodym** a măsurii ν în raport cu măsura μ; se notează $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

O demonstraţie asemănătoare cu aceea a teoremei Radon-Nikodym se poate da pentru următoarea teoremă de descompunere datorată lui Lebesgue.

6.2.7 Teoremă (teorema de descompunere a lui Lebesgue). *Pentru orice măsură reală finită $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, există două măsuri reale $\nu, \rho : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ aşa fel încât $\nu \ll \mu$, $\rho \perp \mu$ şi $\theta = \nu + \rho$.*

Încheiem acest paragraf cu un rezultat care exprimă integrala în raport cu o măsură $\nu \ll \mu$ cu ajutorul integralei în raport cu μ.

6.2.8 Teoremă. *Fie $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ o măsură pozitivă, finită, absolut continuă în raport cu măsura pozitivă şi σ-finită μ şi fie $f = \dfrac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{L}^1_+(X)$ derivata sa Radon-Nikodym. Atunci*

$$\int_X g d\nu = \int_X g \cdot f d\mu = \int_X g \cdot \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu, \text{ oricare ar fi } g \text{ funcţie } \nu-\text{integrabilă.}$$

Demonstraţie. Să considerăm întâi $g = \chi_B$, unde $B \in \mathcal{A}$; atunci

$$\int_X g d\nu = \nu(B) = \int_B f d\mu = \int_X \chi_B \cdot f d\mu = \int_X g \cdot f d\mu.$$

Acest rezultat se extinde imediat la orice funcţie etajată şi pozitivă $g \in \mathcal{E}_+(X)$.

Să considerăm acum $g \in \mathcal{M}_+(X)$; atunci există $(g_n)_n \subseteq \mathcal{E}_+(X)$ aşa fel încât $g_n \uparrow g$. Teorema convergenţei monotone ne permite să scriem

$$\int_X g d\nu = \lim_n \int_X g_n d\nu = \lim_n \int_X g_n \cdot f d\mu = \int_X g \cdot f d\mu.$$

Fie acum g o funcţie ν-integrabilă; atunci $\int_X g^+ d\nu < +\infty$, $\int_X g^- d\nu < +\infty$, $\int_X g^+ d\nu = \int_X g^+ \cdot f d\mu$ şi $\int_X g^- d\nu = \int_X g^- \cdot f d\mu$. Scăzând ultimele două relaţii obţinem rezultatul dorit. ∎

6.3 Diferenţierea funcţiilor reale

6.4 Exerciţii

Bibliografie

[1] Athereya, K.B., Lahiri, S.N. - *Measure theory and probability theory*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag, 2006.

[2] Bass, R. F. - *Real Analysis*, Course Notes, Dept. of Math., University of Connecticut, 2009.

[3] Florescu, L.C. - *Topologie. Analiză funcţională. Teoria măsurii*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, 1999.

[4] Florescu, L.C. - *Teoria măsurii*, http://www.math.uaic.ro/ lflo/Didactic, 2009.

[5] Hartman, S., Mikusiński, J. - *The theory of Lebesgue measure and integration*, Pergamon Press, Oxford. London.New York. Paris, 1961.

[6] Nicolescu, M. - *Analiză Matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, vol. II (1958), vol. III (1960).

[7] Precupanu, A.M. - *Analiză matematică. Funcţii reale*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1976.

[8] Precupanu, A.M. - *Culegere de probleme de analiză matematică. Funcţii reale*, vol.I, II, Ed. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, 1982.

[9] Stein, E.M., Shakarchi, R. - *Real analysis*, Princeton Univ. Press, 2005.

[10] Yeh, J. - *Real analysis. Theory of measaure and integration*, World Scientific, New Jersey.London.Singapore.Beijing, 2006.